TIDSKRIFT

FÖR

ELEMENTÄR MATEMATIK, FYSIK OCH KEMI

UTGIVEN AV

C. O. G. BORELIUS, OTTO GALLANDER,
J. S. HEDSTRÖM, HJALMAR OLSON,
G. STARCK

NIONDE ÅRGÅNGEN

1925—1926

STOCKHOLM
ALBERT BONNIERS FÖRLAG

STOCKHOLM
ALB. BONNIERS BOKTRYCKERI 1926

Nionde årgångens innehåll.

I. Uppsatser och recensioner.

Sid.

ALSÉN, NILS. Geologisk och mineralogisk litteratur. (Anm. av *Gertz o. Grönvall*, Grundlinjer till mineral- och bergartslära; *Harberg*, Geologi; *Caldenius o. Sandegren*, Vårt land under och efter istiden; *Sörlin*, Jorden och livet) 242

AURÉN, T. E. Det Perrinska röret 69

— — Uppvärmningsapparat för kalorimeterförsök 71

BENEDICKS, CARL. Varpå beror invarens bristande dilatation? 33

BÅGMAN, S. Härledning av diameterns ekvation 19

BÄCKSTRÖM, HELMER. En enkel och allmängiltig metod att bestämma brännvidden för positiva linser eller linssystem 202

CHARLIER, C. V. L. Linsformeln 135

De nya fysiska och kemiska institutionerna vid Högre reallläroverket å Norrmalm i Stockholm 151

ENEROTH, OTTO. Procent- och ränteräkning i skolan och i praktiken. I 129

— — » » » » II 193

FOGHAMMAR, ERNST. Bestämning av vattenångans tryck vid olika temperaturer 51

— — Urladdning i förtunnade gaser 53

— — Värmets mekaniska ekvivalent 212

GALLANDER, OTTO (O. G—R). Adolf Meyer † 1

— — Elementär behandling av entropibegreppet 22

— — Tonfrekvenstelegrafi 144

— — Anm. av *Rodhe*, Förbränningsmotorer 180

— — Anm. av *Bragg*, Om tingens väsen 180

— — (O. G—R). Anm. till H. Petrinis uppsats om enheterna för kraft och massa 221

GUNNESON, FOLKE. En apparat för bestämning av g 63

GUSTAVER, BROR. En evakueringsanordning för giftgaser i kemiska laboratorier 73

GRÖNWALL, KARL A. Ett par ord om kristallografien i skolan 80

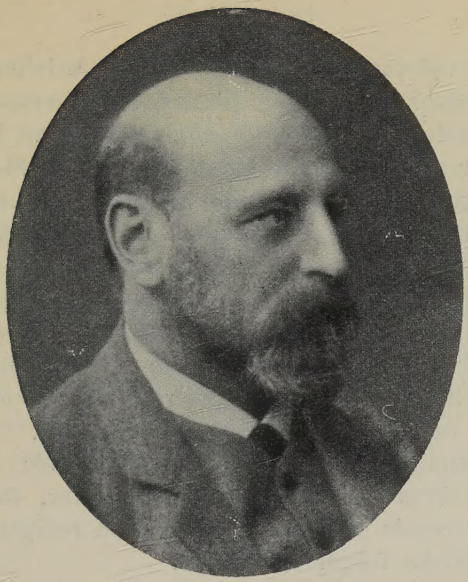
HEDSTRÖM, J. S. (H—M). Ungdomen och ingenjörskonsten. (Anm. av *Hawks*, Ungdomens ingenjörsbok) 108

HERLIN, ERNST. Atomfysiken — ett nytt moment i en omfattande kurs. (Anm. av *Starck*, Materiens struktur; *Vegard*, Materiens byggnad och atomernas inre; *Gleditsch*, Radioaktivitet och grundämnesomvandling) 102

Sid.
LING, C. U. Vågrörelseapparat för transversella och longitudinella vågor 55
LÖNNQVIST, CONRAD. En omtvistad figur i optiken 47
MELANDER, KARL H. A. Två apparater för kemiska skolförsök..... 147
OLSON, HJALMAR. Matematiken i realskolans högsta klasser. (Anm. av *Lohmander*, Sifferekvationer av första graden; *Uddholm*, Lärobok i matematik; *Lindborg*, En samling matematiska repetitionsexempel) 83
— — Svar å Genmäle härtill 249
PEHRSON, TORSTEN. Den organiska kemiens ställning på gymnasiet. (Anm. av *Moll-Starck*, Organisk kemi)..... 92
PETRINI, HENRIK. Approximationsmetoder till ekvationen $x^n = a - bx$. II 4
— — Om enheterna för kraft och massa 218
RUDBERG, TURE. (T. R.). Anm. till H. Petrinis uppsats om enheterna för kraft och massa 220
SCHULTZ-STEINHEIL, C. A. Om den Dopplerska principen 216
STARCK, G. Atomteoriens tillämpning på kemiska problem 222
— — (G. S.). Kemien och det praktiska livet. (Anm. av *Bolin*, Kemien och vad den lär oss i det praktiska livet) 97
— — Kemiska notiser X, XI 75
SÖDERBORG, BENKT. Äldre och nyare läroböcker i fysik för gymnasiet 160
UDDHOLM, ALFRED. Matematiken i realskolans högsta klasser. Genmäle 246
WAHLGREN, M. E. Lärobokens roll vid geometriundervisningen i realskolan. (Anm. av *Olson*, Plan geometri; *Larson*, Lärobok i geometri) 235

II. Kortare meddelanden m. m.

H—M. Minskning i antalet hemskrivningar 112
ISING, GUSTAF. Till frågan om enheterna för induktans och kapacitet 115
Problemavdelning (red. av S. BÅGMAN)..... 116, 185, 252
Råd och vinkar för undervisningen 182
Till redaktionen insända böcker 109, 180, 251



ADOLF MEYER

†

Då rektor Hedström skulle skaffa sig medarbetare för att få till stånd denna tidskrift, vände han sig först till Adolf Meyer, då han väl kände dennes stora arbetsförmåga och arbetslust. Meyer var villig och angrep sin nya uppgift med sådan energi, att han alltifrån början tog ledningen inom redaktionen och blev tidskriftens huvudredaktör. Inom redaktionen svarade han för avdelningen matematik, och i denna egenskap genomgick han kritiskt varje insänt matematiskt manuskript och såg därvid till ej blott att allt var riktigt utan påvisade dessutom ofta för resp. författare, hur de kunde förenkla svårfattliga ställen och i övrigt förbättra manuskripten.

Vidare redigerade Meyer tidskriftens avdelning kortare meddelanden, speciellt problemavdelningen.

Då man oförmodat kom in i Meyers arbetsrum, kunde man vara säker på att finna honom vid arbetsbordet. Hade han från skolan fått in en omgång skrivningar, laborationsredogörelser eller hemräkningar, var allt annat arbete lagt åsido, och han steg ogärna upp från bordet, innan packen var genomgången. Som prov på den omsorg han nedlade vid rättandet av elevarbeten må nämnas, att han slog upp varje logaritm, som förekom i laborationsredogörelser. Då han var fri från korrektionsarbete, sysslade han vanligen med att lösa matematiska problem för att finna lämpliga sådana för tidskriften eller kritiserade han inkomna manuskript eller ock skrev han på nya uppsatser.

Då redaktionens medlemmar visste, huru omsorgsfull huvudredaktören var även med småsaker, överläts med största förtroende allt detaljarbete med redigeringen samt alla ekonomiska frågor åt honom.

Redaktionens saknad efter Adolf Meyer blandas således med dess tacksamhet för allt vad han uträttat för tidskriften.

Här torde ej vara platsen för en utförlig skildring av Adolf Meyers liv och verksamhet allra minst för hans stora pedagogiska insatser. Det är dock svårt för en nära vän till den bortgångne att ej meddela några drag, som belysa hans personlighet.

En av Meyers mest utmärkande egenskaper var hans sanningskärlek och rättskänsla. Under hans ungdom togo dessa känslor sig stundom så aggressiva former, att han stötte många för huvudet. Detta hindrade dock ej, att han kunde vara personlig vän t. o. m. med den, som i snart sagt alla diskutabla frågor hade olika åsikter mot hans egna. Med åren blev han hovsammare i formen utan att i sak ändra sina åsikter eller svika sina ideal.

Under de sista tio åren kände han fruktan för den dag, då han skulle pensioneras. Allt oftare talade han om sina arbetsplaner som pensionerad. Gärna önskade han få tjänstgöring vid privata skolor, ty skolan var hans liv, och han hade redan vidtalat en rektor att ge honom dylikt arbete.

Helst önskade han dock få dö, innan staten ej mer hade bruk för hans arbetskraft. Ej ens då han någon gång var sjuk kunde han vila. För 2 1/2 år sedan låg han i mycket hög feber under en veckas tid. Han bad då att få till sig i sängen ej blott skönlitteratur — Meyer var mycket beläst såväl i vår egen som i tysk skönlitteratur — utan även problemsamlingar. Han fruktade en långsam avtyning. Det slut han fick var i överensstämmelse med hans önskan. Den 11 juni i år lade han sig frisk och kry, sedan han just kommit till sitt sommarnöje, men drabbades under natten av ett slaganfall, som ändade hans liv, utan att han gav något tecken till lidande från sig.

Må hans rättframhet och arbetsiver vara oss ett manande föredöme.

O. G—r.

Approximationsmetoder till ekvationen $x^n = a - bx$.

Av HENRIK PETRINI.

II.

Tredje approximationsmetoden.

Ekvationen (4)[1] kan skrivas under formen

$$(43) \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = \frac{a}{b} - \frac{1}{b} x^n.$$

Den första approximationsmetoden slog slint, om icke villkoret (9) var uppfyllt.

Om t. ex. a vore $= b$, så inses omedelbart att x är < 1. I detta fall är det naturligare att börja med att försumma x^n än att försumma termen x. Användes detta förfarande på ekv. (43), erhålles följande approximationsberäkning:

$$(44) \quad \ldots \quad x_1 = \frac{a}{b}; \quad x_2 = \frac{a}{b} - \frac{1}{b} x_1^n; \quad x_3 = \frac{a}{b} - \frac{1}{b} x_2^n;$$

$$x_4 = \frac{a}{b} - \frac{1}{b} x_3^n \text{ etc.},$$

$$\because x_1 > x_2, \; x_2 < x_3, \; x_2 < x_4 \text{ etc.}$$

och generellt

$$x_1 > x_3 > x_5 > \ldots, \; x_{2\nu-1} > x_{2\nu+1}$$

$$x_2 < x_4 < x_6 < \ldots, \; x_{2\nu} < x_{2\nu+2}.$$

Vidare är $x_1 > x$, $\because x_2 < x$ etc.

och i allmänhet $x_{2\nu} < x < x_{2\nu+1}$.

För att x_2 skall bli positivt, fordras

$$(45) \quad \ldots\ldots\ldots \quad a^{n-1} < b^n \text{ (jfr ekv. 9).}$$

[1] Se h. 2, s. 65.

Sätter man

$$(46)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\nu=\infty} x_{2\nu} = u \\ \lim\limits_{\nu=\infty} x_{2\nu+1} = v\,, \\ \because \text{ enl. (6) } \dfrac{a}{b} - \dfrac{a^n}{b^{n+1}} < u \leqq x \leqq v < \dfrac{a}{b}\,, \end{cases}$$

så finner man

$$(47)\quad \begin{cases} u = \dfrac{a}{b} - \dfrac{v^n}{b} \\ v = \dfrac{a}{b} - \dfrac{u^n}{b}\,, \end{cases}$$

$$(48)\quad \because\ u = \frac{a}{b} - \frac{1}{b^{n+1}}(a - u^n)^n. \quad (3)$$

Ekv. (48) satisfieras såväl av u som av v och x. Ekv. (43) har en reell positiv rot, alltså måste ekv. (48) ha åtminstone en reell positiv rot, eftersom den tydligen innehåller alla rötterna till (43). För att undersöka rötterna till (48) skola vi studera kurvan

$$(49)\quad \begin{cases} y = u - \dfrac{a}{b} + \dfrac{1}{b^{n+1}}(a - u^n)^n, \\ \because\ y' = 1 - \dfrac{n^2}{b^2}\left(\dfrac{au - u^{n+1}}{b}\right)^{n-1} \\ y'' = -\dfrac{n^2(n-1)}{b^{n+1}}\, u^{n-2}(a - u^n)^{n-2}[a - (n+1)u^n]\,. \end{cases}$$

Vi skola först studera de värden $\bar{u}$, $\bar{y}$ för vilka y' är $=0$. Av (49) fås för $y'=0$

$$(50)\quad \begin{cases} a = \bar{u}^n + \dfrac{b}{\bar{u}}\lambda^2 \\ \lambda = \left(\dfrac{b}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{cases}$$

Insättes detta värde på a i den första av ekvationerna (49), erhålles

$$(51)\quad \bar{y} = \frac{1}{\bar{u}}(\bar{u}^2 - \lambda^2) - \frac{1}{b\bar{u}^n}(\bar{u}^{2n} - \lambda^{2n})\,,$$

vadan $\bar{y}$ innehåller faktorn $\bar{u}^2 - \lambda^2$. Sätt

$$(52)\quad \begin{cases} \bar{y} = -\dfrac{1}{b\bar{u}^n} Q(\bar{u}) \\ Q(\bar{u}) = \bar{u}^{2n} - \lambda^{2n} - b\bar{u}^{n-1}(\bar{u}^2 - \lambda^2), \\ \because\ Q'(\bar{u}) = 2n\bar{u}^{2n-1} - b[(n+1)\bar{u}^n - (n-1)\lambda^2\bar{u}^{n-2}] \equiv \\ \qquad \equiv \bar{u}^{n-2}R(\bar{u}), \text{ där} \\ R(\bar{u}) = 2n\bar{u}^{n+1} - b(n+1)\bar{u}^2 + b(n-1)\lambda^2, \\ \because\ R'(\bar{u}) = 2(n+1)\bar{u}[n\bar{u}^{n-1} - b] \\ \qquad b = n\lambda^{n-1}. \end{cases}$$

Genom insättning finner man

$$(53)\quad \ldots\ldots\quad R(\lambda) = R'(\lambda) = 0,$$

$\because\ Q(\bar{u})$ har en tredubbel faktor $(\bar{u} - \lambda)$,

$$(54)\quad \ldots\quad \because\ \bar{y} = -\frac{1}{b\bar{u}^n}(\bar{u} - \lambda)^3(\bar{u} + \lambda)S(\bar{u}).$$

Då $R'(\bar{u})$ (52) ej kan bli $=0$ för mer än ett enda $\bar{u}$-värde >0, så kan $R(\bar{u})$ ej bli $=0$ för mer än två $\bar{u}$-värden, skilda eller sammanfallande (fig. 4). Enligt (53) äro de sammanfallande, $\because R(\bar{u}) \geqq 0$ för $\bar{u} > 0$. Då $Q'(\bar{u})$ således alltid är $\geqq 0$ för $\bar{u} > 0$, så kan $Q(u)$ ej bli $=0$ för mer än ett positivt $\bar{u}$-värde,

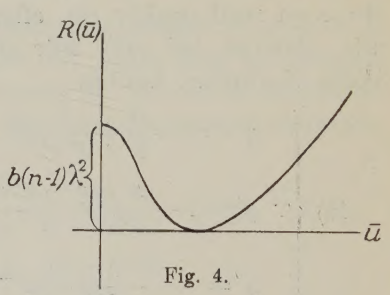


Fig. 4.

$$(55)\quad \because\ S(\bar{u}) > 0 \text{ för } \bar{u} > 0.$$

Av (54) och (55) följer, att

$$(56)\quad \begin{cases} \bar{y} \text{ är} > 0, \text{ om } \bar{u} \text{ är} < \lambda, \\ \text{men} \\ \bar{y} \text{ är} < 0, \quad » \quad » \quad » > \lambda. \end{cases}$$

I det fall då $\bar{u}$ är $=\lambda$, finner man (50), att a är $=(n+1)\lambda^n$. I detta fall blir $x = \lambda$.

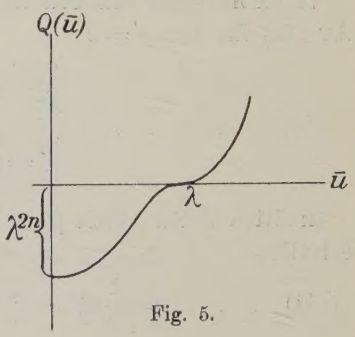


Fig. 5.

Vi skola nu studera kurvan (49) i intervallet $0 \leqq u \leqq a^{\frac{1}{n}}$, då x måste vara $< a^{\frac{1}{n}}$ (6). För $u=0$ fås

$$y_0 = \left(\frac{a^{n-1}}{b^n} - 1\right)\frac{a}{b} < 0 \text{ (45)}, \quad y_0' = 1;$$

för $u = a^{\frac{1}{n}}$ fås

$$y_1 = a^{\frac{1}{n}}\left(1 - \frac{a^{\frac{n-1}{n}}}{b}\right) > 0 \text{ (45)}, \quad y_1' = 1;$$

y'' är $=0$ i en enda punkt $u=\mu$ i intervallet $0 \leqq u \leqq a^{\frac{1}{n}}$, där

$$(57) \quad \ldots\ldots \quad \mu = \left(\frac{a}{n+1}\right)^{\frac{1}{n}}.$$

y' kan alltså bli $=0$ i högst två punkter $(\bar{u}_1 \bar{y}_1)$ och $(\bar{u}_2 \bar{y}_2)$ (fig. 6.); $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$ sammanfalla, om y_μ' är $=0$. Då nu y_0 och y_1 ha olika tecken, så kan y bli $=0$ i högst tre punkter inom intervallet $0 < u < a^{\frac{1}{n}}$ (fig. 7). Om två sådana punkter sammanfalla, så blir $y=0$ på samma gång som y' blir $=0$, vilket enligt (54) kan ske endast för $\bar{u}=\lambda$. Enligt (50) blir då $a=(n+1)\lambda^n$ och således blir enligt (57) $\mu=\lambda$, $\because\ y_\mu'=0$, varav följer, att $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$ sammanfalla (jfr fig. 6). Men då komma alla tre skärningspunkterna mellan kurvan (49) och u-axeln att sammanfalla (fig. 7 c). Kurvan (49) kan alltså aldrig tangera u-axeln i en punkt och skära den i en annan såsom i (fig. 7 b), utan antingen skär den u-axeln i en enda punkt (fig. 7 a, c), eller också skär den u-axeln i tre skilda punkter (fig. 7 d). Villkoret för att det senare fallet skall inträffa är (fig. 7 d), att $\bar{y}_1$ och $\bar{y}_2$ skola ha motsatta tecken, och villkoret härför är enligt (56), att $\bar{u}_1 < \lambda < \bar{u}_2$. Men i intervallet $\bar{u}_1 < u < \bar{u}_2$ är $y' < 0$, medan y' är > 0 eljest, alltså faller λ mellan $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$, om y_λ' är < 0.

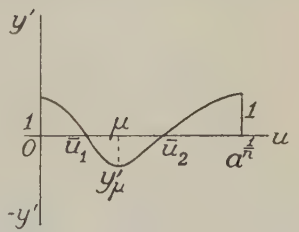


Fig. 6.

Alltså

$$(58)\quad \begin{cases} \text{kurvan (49) skär } u\text{-axeln i en enda punkt, om } y'_\lambda \text{ är} \geqq 0; \\ \text{kurvan (49) skär } u\text{-axeln i tre skilda punkter, om } y'_\lambda \text{ är} < 0. \end{cases}$$

Om y'_λ är $\geqq 0$, så har ekvationen (48) en enda rot inom intervallet (fig. 7 a, c). Men den satisfieras både av u, v och x,

(59) . . . $\because\ u=v=x$, om y'_λ är $\geqq 0$.

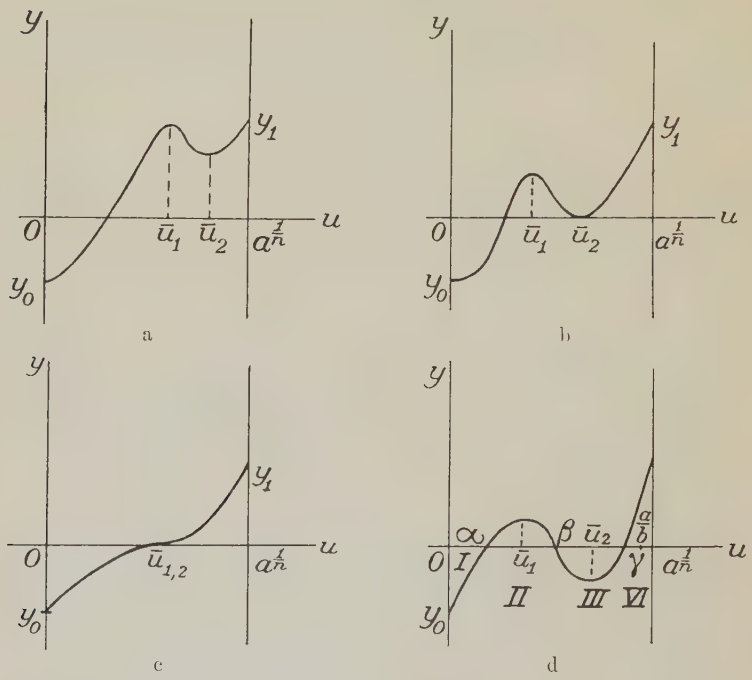


Fig. 7 (ekv. 49).

Antag nu

(60) . . . . . $y'_\lambda < 0$.

Kurvan (49) har i detta fall tre distinkta och endast tre u-värden för $0 < u < a^{\frac{1}{n}}$, där $y=0$. Kalla dem för α, β och γ resp. (fig. 7 d). Vilket av dessa värden är $=x$?

I ekv. (43) startade vi med begynnelsevärdet $x=0$ på högra sidan. Vi skola nu behandla uppgiften något generellare och starta med ett godtyckligt värde x_0,

$$(61) \quad \because\ x_1 = \frac{a - x_0^n}{b},\ x_2 = \frac{a - x_1^n}{b},\ x_3 = \frac{a - x_2^n}{b} \text{ etc.}$$

Antag först $0 < x_0 < \alpha$. Då är (fig. 7 d) och ekv. (49) för $u = x_0$ motsvarande y-värde < 0,

$$\because\ x_0 - \frac{a}{b} + \frac{1}{b}\left(\frac{a - x_0^n}{b}\right)^n = x_0 - \frac{a}{b} + \frac{x_1^n}{b} = x_0 - x_2 < 0,$$

$$(62) \quad \ldots \quad \because\ x_0 < x_2,\ \because\ x_1 < a^n.$$

Samma resultat erhålles, om $\beta < x_0 < \gamma$. För de båda övriga intervallen blir $x_0 > x_2$. För intervallen I och III på x_0 finner man enligt (61) och (62) $x_1 > x_3$ och generellt $x_1 > x_3 > x_5 > \ldots$, $x_0 < x_2 < x_4 < \ldots$

Vidare fås det mot x_1 svarande y-värdet

$$(63) \quad y_{x_1} = x_1 - \frac{a}{b} + \frac{1}{b}\left(\frac{a - x_1^n}{b}\right)^n = \frac{a - x_0^n}{b} - \frac{a}{b} + \frac{x_2^n}{b} = \frac{x_2^n - x_0^n}{b} > 0,$$

$\because\ y_{x_1} > 0$, vadan x_1 faller inom något av områdena II och IV, och generellt: vartannat närmevärde faller inom I och III och de andra inom områdena II och IV, de förra äro stigande, de senare fallande.

Enligt (43) är

$$(64) \quad \begin{cases} x = \dfrac{a - x^n}{b}, \\ \because \text{ om } x_0 \text{ är} > x, \text{ så är } x_1\,(63) < x \text{ och omvänt.} \end{cases}$$

Antag $x = \alpha$. Väljes $\beta < x_0 < \gamma$, så blir (63) $y_{x_1} > 0$ och (64) $x_1 < \alpha$, $\because\ y_{x_1} < 0$ (fig. 7 d), vilket är orimligt.

Antag $x = \gamma$. Väljes $\alpha < x_0 < \beta$, så blir $x_0 > x_2$ (jfr 62) och således $y_{x_1} < 0$ (jfr 63). Men enligt (64) är då $x_1 > \gamma$, $\because\ y_{x_1} > 0$ (fig. 7 d), vilket är orimligt.

Härav följer, att x *är* = *den mellersta roten* β.

Väljes x_0 inom området I, faller enligt (64) x_1 inom området IV, och man får

(65) . . . . . $u=\alpha$, $v=\gamma$.

Väljes x_0 inom området III, faller x_1 inom området II, och man finner

(66) . . . . . $u=\gamma$, $v=\alpha$.

Liknande resultat fås, om x_0 väljes inom områdena II och IV. Man får således bestämda gränsvärden för $x_{2\nu}$ och $x_{2\nu+1}$, men intetdera är $=x$. Villkoret för att den tredje approximationsmetoden skall vara användbar är alltså (58), att y'_λ är $\geqq 0$. Av (49) och (50) finner man

$$(67) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad y'_\lambda = 1 - \left(\frac{a-\lambda^n}{b\lambda}\right)^{n-1},$$

vadan villkoret blir

$$(68) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \left(\frac{a}{n+1}\right)^{n-1} \leqq \left(\frac{b}{n}\right)^n.$$

Anm. Om n är $\geqq 2$, så är villkoret (45) alltid uppfyllt, om villkoret (68) är uppfyllt.

Resultat. Tredje approximationsmetoden är användbar endast då $\left(\frac{a}{n+1}\right)^{n-1}$ är $\leqq \left(\frac{b}{n}\right)^n$. Om $\left(\frac{a}{n+1}\right)^{n-1}$ är $= \left(\frac{b}{n}\right)^n$, så är $x = \left(\frac{b}{n}\right)^{\frac{1}{n-1}}$.

Fjärde approximationsmetoden.

Sätt ekv. (4) under formen

$$(69) \quad . \quad . \quad . \quad x = \frac{a}{b+x^{n-1}}, \quad 0 < x < \frac{a}{b}.$$

Då fås för ett godtyckligt utgångsvärde x_0 inom intervallet $0 \leqq x_0 \leqq \frac{a}{b}$ följande approximationer

(70) $x_1 = \dfrac{a}{b + x_0^{n-1}}$, $x_2 = \dfrac{a}{b + x_1^{n-1}}$, $x_3 = \dfrac{a}{b + x_2^{n-1}}$ etc.

$$x_{\nu+1} = \frac{a}{b + x_\nu^{n-1}}.$$

Antag $x_0 < x$.

Då är $x_1 = \dfrac{a}{b + x_0^{n-1}} > \dfrac{a}{b + x^{n-1}} = x \quad \because x_1 > x$

$$\because x_2 = \frac{a}{b + x_1^{n-1}} < x \text{ etc. och i allmänhet}$$

(71) . . . . . $x_{2\nu} < x$, $x_{2\nu+1} > x$.

Om x_0 är $= 0$, blir $x_2 > x_0$. Man kan således alltid välja x_0 så, att man får

(72) . . . . . $x_0 < x_2$.

Av (71) och (72) fås

(73) . . $\begin{cases} x_1 > x_3 > x_5 > \ldots x_{2\nu-1} > x_{2\nu+1} > x \\ x_0 < x_2 < x_4 < \ldots x_{2\nu} < x_{2\nu+2} < x. \end{cases}$

Sätt

(74) . . . . $\begin{cases} \lim\limits_{\nu=\infty} x_{2\nu} = u \\ \lim\limits_{\nu=\infty} x_{2\nu+1} = v, \\ \because 0 < u \leqq x \leqq v < \dfrac{a}{b}, \end{cases}$

(75) . . . . $\begin{cases} \because u = \dfrac{a}{b + v^{n-1}} \\ v = \dfrac{a}{b + u^{n-1}}, \end{cases}$

$$\because u = \frac{a}{b + \left(\dfrac{a}{b + u^{n-1}}\right)^{n-1}},$$

som kan skrivas

(76) . . . . $(b + u^{n-1})\left(\dfrac{a}{u} - b\right)^{\frac{1}{n-1}} = a$ (3).

Ekv. (76) gäller även för v och x.

Sätt

$$(77)\quad \begin{cases} y=(b+u^{n-1})\left(\dfrac{a}{u}-b\right)^{\frac{1}{n-1}}-a\,, \\ \because\ y'=(n-1)\,u^{n-2}\left(\dfrac{a}{u}-b\right)^{\frac{1}{n-1}}-\dfrac{a}{(n-1)\,u^2}\cdot\dfrac{(b+u^{n-1})}{\left(\dfrac{a}{u}-b\right)^{\frac{n-2}{n-1}}}= \end{cases}$$

$$=\frac{n(n-2)\,au^{n-1}-b\left(n-1\right)^2u^n+a)}{(n-1)(a-bu)^{\frac{n-2}{n-1}}\cdot u^{\frac{n}{n-1}}}\,.$$

För $y'=0$ fås, om $\bar{u}$ är värdet på u för $y'=0$,

$$(78)\quad \ldots\quad (n-1)^2\bar{u}^n-n(u-2)\frac{a}{b}\bar{u}^{n-1}+a=0\,.$$

Sätt (fig. 8)

$$(79)\quad \begin{cases} \eta=(n-1)^2u^n-n(n-2)\dfrac{a}{b}u^{n-1}+a\,, \\ \because\ \eta'=n(n-1)^2u^{n-1}-n(n-1)(n-2)\dfrac{a}{b}u^{n-2}\,. \end{cases}$$

η' blir $=0$ i en enda punkt, där u är $\neq 0$, nämligen för u-värdet $\varrho=\dfrac{n-2}{n-1}\dfrac{a}{b}$. Då η är >0 för $u=0$ och $u=\dfrac{a}{b}$, så blir $\eta=0$ i ingen punkt, en dubbelpunkt eller två distinkta punkter, allt efter som det mot ϱ svarande η-värdet r_ϱ är >0, $=0$ eller <0. Man finner

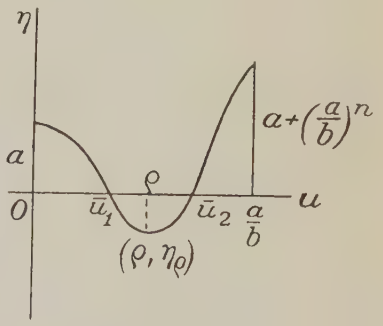


Fig. 8 (ekv. 79).

$$(80)\quad \ldots\quad \begin{cases} \varrho=\dfrac{n-2}{n-1}\cdot\dfrac{a}{b} \\ r_\varrho=a\left[1-\varepsilon\dfrac{(n-2)^n}{(n-1)^{n-1}}\right] \\ \varepsilon=\dfrac{a^{n-1}}{b^n}\,. \end{cases}$$

Man finner, att η_ϱ är $=0$ för

$$(81) \quad \ldots \quad \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{(n-1)^{n-1}}{(n-2)^n}, \text{ då man får} \\ x = \dfrac{n-2}{n-1}\,\dfrac{a}{b} \text{ (jfr ekv. 42),} \end{cases}$$

vilket lätt konstateras a posteriori genom insättning i ekv. (43).

Om η_ϱ är > 0 blir y' icke $= 0$, (ty y' är $= 0$ samtidigt med η, vilken är pos. för både 0 och $\dfrac{a}{b}$ och således har ett min. för $u = \varrho$), och då blir $y = 0$ i en enda punkt för $0 < u < \dfrac{a}{b}$,

$$(82) \quad \ldots \quad \because\ u = v = x\,.$$

Villkoret $\eta_\varrho > 0$ kan skrivas under formen

$$(83) \quad \ldots \quad \frac{a^{n-1}}{b^n} < \frac{(n-1)^{n-1}}{(n-2)^n}\,.$$

Högra ledet i (83) är > 1 för $n = 3, 4, 5$, men < 1 för $n \geqq 6$.

Om man i stället för att välja $x_0 < x$ hade valt $x_0 > x$, så hade resultatet blivit detsamma, fast »<» måste utbytas mot »>» och tvärtom i formlerna (71)—(73).

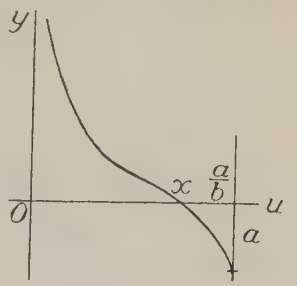


Fig. 9 (ekv. 77).

Vi skola nu visa upp, att ekv. (72) alltid gäller, blott man väljer

$$0 \leqq x_0 < x\,.$$

Det mot x_0 svarande y-värdet i ekv. (77) är enligt fig. 9 alltid > 0,

$$\because\ (b + x_0^{n-1}) \left(\frac{a}{x_0} - b\right)^{\frac{1}{n-1}} > a\,,$$

$$\because\ \left(\frac{a}{x_1}\right)^{n-1} \left(\frac{a}{x_0} - b\right) > a^{n-1}\,,$$

$$\because\ \frac{a}{x_0} > b + x_1^{n-1} = \frac{a}{x_2}\,,$$

(84) . . . . . $\because x_0 < x_2$ (72).

Hade man valt x_0 så, att $\frac{a}{b} > x_0 > x$, så hade man fått samma resultat men med tecknen $<$ och $>$ omkastade i (71) – (73).

Antag nu, att η_0 är < 0. Då blir (fig. 8) $y' = 0$ i två och endast två punkter $\bar{u}_1$ och $\bar{u}_2$. I detta fall blir $y = 0$ i minst en och högst tre punkter (fig. 10 a, b).

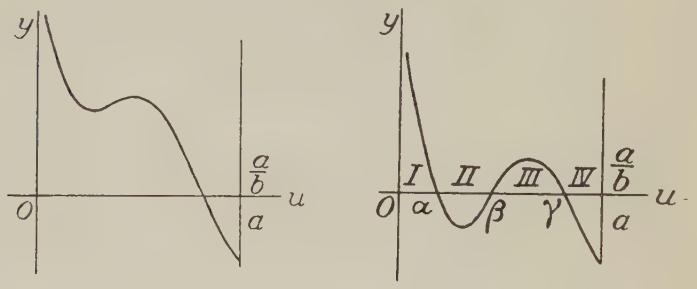


Fig. 10 (ekv. 77).

I fallet a gäller som förut ekv. 82.

I fallet b måste x vara någon av rötterna α, β, γ. På samma sätt som förut (84) finner man

(85) $\begin{cases} x_0 < x_2, \because x_{2\nu-1} > x_{2\nu+1}; \quad x_{2\nu+2} > x_{2\nu}, \text{ om } x_0 \\ \quad \text{väljes inom området I eller III, men} \\ x_0 > x_2, \because x_{2\nu-1} < x_{2\nu+1}; \quad x_{2\nu+2} < x_{2\nu}, \text{ om } x_0 \\ \quad \text{väljes inom området II eller IV.} \end{cases}$

Vidare finner man

(86) . . . . . $y_{x_1} = a\left(\frac{x_0}{x_2} - 1\right)$,

varav följer, att om x_0 faller inom I eller III, så är $y_{x_1} < 0$ och omvänt, d. v. s. att

(87) . . y_{x_0} och y_{x_1} ha motsatta tecken.

Då vidare (85) x_0 och x_1 falla på motsatta sidor om x, så finner man, liksom i fråga om den tredje approxima-

tionsmetoden (sid. 6), att x endast kan vara = den mellersta roten β, alltså

(88) . . . . . $x = \beta$.

Om x_0 faller inom området I, faller alltså x_1 inom området IV, och man får (85)

(89) . . . . . $u = \alpha$, $v = \beta$,

vadan ingen approximation till roten β vinnes. Om åter x_0 faller inom området II, så faller x_1 inom området III, men även nu återfås samma resultat (89). För de återstående områdena $\beta < x_0 < \frac{a}{b}$ fås

(90) . . . . . $u = \beta$, $v = \alpha$,

och således ej heller nu någon approximation till roten β. *I fallet fig. 10 b erhålles således ingen approximation till roten* x.

För att finna gränsfallet mellan a och b (fig. 10) tänka vi oss, att det ena av områdena II och III, t. ex. II krymper ihop till att bli = 0, $\because \alpha = \beta = x$. Om x_0 tages inom området III, så faller x_1 inom II (87) och får således samma värde i gränsfallet (fig. 11), varhelst x_0 väljes inom området III, vilket är orimligt. Gränsfallet kan således inträffa endast då båda områdena II och III samtidigt försvinna, d. v. s. då $\eta_{/\varrho}$ är = 0 (81), vilket utgör gränsfallet till fig. 9.

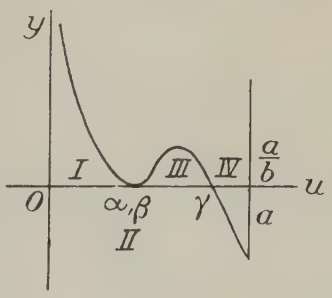


Fig. 11.

Resultat. Den fjärde approximationsmetoden kan endast och alltid användas, då $\left(\frac{a}{n-1}\right)^{n-1}$ är $\leqq \left(\frac{b}{n-2}\right)^n$, *och är alternerande.*

Sammanfattning. De fyra approximationsmetoderna kunna

alltid användas på ekv. $x^n = a - bx$ i följande fall och endast då:

$$(91)\quad \begin{cases} a^{n-1} > b^n \ldots\ldots\ldots \text{1:a metoden.} \\ \left(\frac{a}{n+1}\right)^{n-1} \leqq \left(\frac{b}{n}\right)^n \ldots \text{3:e metoden.} \\ \left(\frac{a}{n-1}\right)^{n-1} > \left(\frac{b}{n-2}\right)^n \text{2:a metoden.} \\ \left(\frac{a}{n-1}\right)^{n-1} \leqq \left(\frac{b}{n-2}\right)^n \text{4:e metoden.} \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{Begynnelsevärdet} \\ x_0 \text{ får tagas inom} \\ \text{ett intervall, som} \\ \text{innesluter värdet} \\ \frac{n-2}{n-1}\,\frac{a}{b}. \end{array} \right.$$

$$(92)\quad \text{Om } \left(\frac{a}{n-1}\right)^{n-1} \text{är} = \left(\frac{b}{n-2}\right)^n, \text{ så är } x = \frac{n-2}{n-1}\,\frac{a}{b},$$

och i allmänhet

$$(93)\quad \text{om } \left(\frac{a}{\mu+1}\right)^{n-1} \text{är} = \left(\frac{b}{\mu}\right)^n, \text{ så är } x = \frac{\mu}{\mu+1}\,\frac{a}{b}.$$

Anm. För varje ekvation av formen (4) finns det sålunda två approximationsmetoder utom fallet (92), där x är bekant, och i fallet

$$\frac{(n+1)^{n-1}}{n^n} < \frac{a^{n-1}}{b^n} \leqq 1,$$

då alltid en, men endast en approximationsmetod kan användas.

Exempel. $x^n = a - bx$, $a^{n-1} = b^n$. Sätt $x = kz$. Då fås en ekvation av samma form $z^n = a_1 - b_1 z$. Bestämmes k så, att b_1 blir $= 1$, så visar det sig, att även a_1 blir $= 1$. Man får $k = a^{\frac{1}{n}}$,

$$\therefore\ z^n = 1 - z.$$

På denna ekvation skall andra eller fjärde metoden användas, allteftersom n är $\geqq 6$ eller < 6.

2:a metoden: $z_0 = \frac{n-2}{n-1}$, $z_1 = \sqrt[n-1]{\frac{1}{z_0} - 1}$, $z_2 = \sqrt[n-1]{\frac{1}{z_1} - 1}$,

$$z_3 = \sqrt[n-1]{\frac{1}{z_2} - 1} \text{ etc.}$$

4:e metoden: $z_0 < 1$, $z_1 = \frac{1}{1+z_0^{n-1}}$, $z_2 = \frac{1}{1+z_1^{n-1}}$, etc.

Ex. 1. $z^2 = 1 - z$, $\therefore z = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 0{,}61803$.

4:e metoden skall användas, $\therefore z_0 = 0$, $z_1 = 1$, $z_2 = \frac{1}{2}$,

$$z_3 = \frac{1}{1+0{,}5} = \frac{2}{3},\ z_4 = 0{,}6,\ z_5 = \frac{5}{8} = 0{,}625,\ z_6 = \frac{8}{13} = 0{,}615,$$

$$z_7 = \frac{13}{21} = 0{,}619,\ z_8 = \frac{21}{34} = 0{,}61764,\ z_9 = \frac{34}{55} = 0{,}61818,$$

$$z_{10} = \frac{55}{89} = 0{,}61804,\ z_{11} = \frac{89}{144} = 0{,}61805.$$

2:a metoden skall användas. $z_0 = \frac{4}{5}$, $z_1 = \sqrt[5]{\frac{1}{4}} = 0{,}758$,

$$z_2 = \sqrt[5]{\frac{242}{758}} = 0{,}796,\ z_3 = \sqrt[5]{\frac{204}{796}} = 0{,}762,\ z_4 = \sqrt[5]{\frac{238}{762}} = 0{,}792,$$

$$z_5 = \sqrt[5]{\frac{208}{792}} = 0{,}765 \text{ etc.}$$

Approximationen kan påskyndas, om man använder ett medelvärde mellan de två sista närmevärdena att approximera med. Då man ej vet om det är för stort eller för litet, använder man nästa gång det funna värdet. Man får då $z_0 = 0{,}8$, $z_1 = 0{,}76$. Approximeras nu med $z_1' = 0{,}78$ fås $z_2 = 0{,}777$ och $z_3 = 0{,}779$. Approximeras med $z_3' = 0{,}778$ fås $z_4 = 0{,}77782$ och $z_5 = 0{,}77780 = z_3'$ och sålunda har man i själva verket fått en ny decimal för varje approximation.

Ex. 3. $x^7 = 5 - 8x$.

Tredje och fjärde metoderna äro användbara. Väljes tredje metoden och sättes $x_0 = 0$ fås

$$x_1 = \frac{5}{8} = 0{,}625,\ x_2 = 0{,}625 - \frac{x_1^7}{8} = 0{,}62203,\ x_3 = 0{,}62206:$$

$$x_4 = 0{,}62206.$$

I detta fall har man fått fyra rätta decimaler efter endast två utförda approximationer. Med en sjuställig tabell fås

$$x_3 = 0{,}6\,2\,0\,5\,8, \quad x_4 = 0{,}6\,2\,0\,5\,6\,9\,1, \quad x_5 = 0{,}6\,2\,0\,5\,6\,9\,6\,2,$$

$$x_6 = 0{,}6\,2\,0\,5\,6\,9\,5\,9 = x_7.$$

Härledning av diameterns ekvation.

Av S. BÅGMAN.

Följande härledning av diameterns ekvation avviker från den sedvanliga. Antag, att de parallella kordornas vinkelkoefficient är k, koordinaterna för en viss kordas skärningspunkter med kurvan (x_1, y_1) och (x_2, y_2) samt mittpunktens koordinater (x_0, y_0). Följande system erhålles, om kurvans ekvation är $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$:

$$\begin{cases} k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \\ 2x_0=x_2+x_1 \\ 2y_0=y_2+y_1 \\ \dfrac{x_1^2}{a^2}+\dfrac{y_1^2}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ \dfrac{x_2^2}{a^2}+\dfrac{y_2^2}{b^2}=1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

Av (1) och (2) fås genom subtraktion

$$\frac{x_2^2-x_1^2}{a^2}+\frac{y_2^2-y_1^2}{b^2}=0$$

eller
$$\frac{(x_2+x_1)(x_2-x_1)}{a^2}+\frac{(y_2+y_1)(y_2-y_1)}{b^2}=0$$

eller
$$\frac{x_2+x_1}{a^2}+\frac{y_2+y_1}{b^2}\cdot\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=0\,.$$

Införas x_0, y_0 och k, så fås

$$\frac{2x_0}{a^2}+\frac{2y_0}{b^2}\cdot k=0$$

eller, efter bortlämnande av indices,

$$y = -\frac{b^2}{a^2 k} \cdot x ,$$

som är den sökta ekvationen.

Utbytes b^2 mot $-b^2$, fås för hyperbeln

$$y = \frac{b^2}{a^2 k} \cdot x .$$

För parabeln $y^2 = 2px$ fås på likartat sätt diameterns ekvation

$$y = \frac{p}{k} .$$

Är kurvans ekvation given under den allmänna formen

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 ,$$

erhålles vid subtraktion av de båda villkorsekvationerna

$$A(x_2^2 - x_1^2) + B(2x_2y_2 - 2x_1y_1) + C(y_2^2 - y_1^2) + D(x_2 - x_1) + E(y_2 - y_1) = 0$$

eller

$$A(x_2 + x_1)(x_2 - x_1) + B(y_2 + y_1)(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1)(x_2 + x_1) + C(y_2 + y_1)(y_2 - y_1) + D(x_2 - x_1) + E(y_2 - y_1) = 0$$

eller

$$A(x_2 + x_1) + B(y_2 + y_1) + B(x_2 + x_1) \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + C(y_2 + y_1) \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} + D + E \cdot \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0 .$$

Införas x_0, y_0 och k, så fås

$$Ax_0 + By_0 + Bx_0k + Cy_0k + D + Ek = 0$$

eller, efter bortlämnande av indices,

$$x(A + Bk) + y(B + Ck) + D + Ek = 0 ,$$

som är diameterns ekvation.

Vinkelkoefficienten k_1 blir

$$k_1 = -\frac{A + Bk}{B + Ck} .$$

Genom att sätta $k_1 = -\frac{1}{k}$ fås det bekanta sambandet mellan axlarnas vinkelkoefficienter:

$$k^2 + \frac{A - C}{B} \cdot k + 1 = 0 .$$

Avsikten med ovanstående är endast att fästa uppmärksamheten på metoden, således ej ett försök att utränga den i våra läroböcker förekommande, vilken otvivelaktigt har sina stora förtjänster.

Författaren har blivit uppmärksamgjord på, att den nu meddelade härledningen förekommer i *N. F. Runquist*, Repetitionskurs i Analytisk geometri. Där behandlas emellertid ej det allmänna fallet med xy-term, vilket fullständigheten fordrar.

Elementär behandling av entropibegreppet.

Av OTTO GALLANDER.

Det är en påfallande olikhet mellan akademisk och teknisk litteratur om entropien liksom för resten om alla ämnen. Delvis beror detta därpå att den förra litteraturen vänder sig till dem, som uppövat sin förmåga att tänka abstrakt och som behärska en stor matematisk apparat, då däremot den senare vänder sig till en läsekrets, som ofta blott känner infinitesimalkalkylens elementer och som är van att röra sig med konkreta föreställningar.

En annan anledning till nämnda olikhet är att akademici sträva att få fram nya resultat oberoende av dessas praktiska användbarhet, under det att teknici ständigt anlägga nyttans synpunkt.

I den tekniska litteraturen avbildas ofta matematiska funktioner grafiskt för att utbyta tidsödande räkneoperationer mot mätningar på diagram. Härigenom vinnes ej blott att matematiska svårigheter undvikas utan även att de behandlade funktionerna få ökad konkretion.

I det följande avses att på elementärt sätt visa, hur teknici göra entropibegreppet konkret, i förhoppning om att någon akademiskt bildad fysiklärare får lust att närmare sätta sig in i den tekniska tankegången, t. ex. genom att läsa professor *Hubendicks* böcker i ämnet (De tekniska vetenskaperna, avdelning maskinteknik, band II och band IX).

Ett annat mål för denna uppsats är att anvisa ett sätt för fysiklärare vid de elementära tekniska skolorna, hur de kunna ge sina elever entropibegreppet så, att deras

kamrater, som undervisa i värmeteknik, ha nödig grund att bygga vidare på vid den tekniska undervisningen.

För att få framställningen så kort som möjligt tar jag mig friheten bygga på min elementära värmelära, andra uppl., i det följande betecknad med G. Jag förutsätter således kunskap om lagarna för ideella gaser, om absolut temperatur, om isotermer och adiabater och om Carnots cirkelprocess.

*

För den enkla Carnotska cirkelprocessen gäller som bekant

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2},$$

då Q_1 betecknar den värmemängd, som tillföres viktsenheten (ideell) gas, under det den isotermiskt utvidgar sig vid absoluta temperaturen T_1, och Q_2 den värmemängd, som bortföres därifrån, under det gasen isotermiskt sammandrar sig vid absoluta temperaturen T_2.

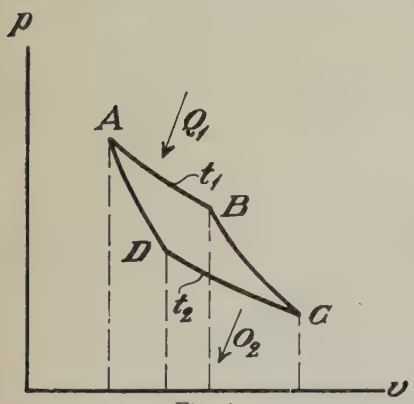


Fig. 1.

Kvoten $\frac{Q_1}{T_1}$ har inom värmeläran en mycket stor betydelse och kallas gasens entropiökning under tillståndsförändringen $A - B$ (se fig. 1), $\frac{Q_2}{T_2}$ dess entropiminskning (negativa entropiökning under tillståndsförändringen $C - D$.

Entropien betecknas med S.

Nyss anförda resultat $\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}$ kan med hjälp av entropibegreppet formuleras: entropien hos en gas ändras ej, då den genomlöper en carnots cirkelprocess.

För att generalisera entropibegreppet så, att det får be-

tydelse även då gasens temperatur ändras under värmetillförseln, betrakta vi en cirkelprocess som i ett *pv* diagram

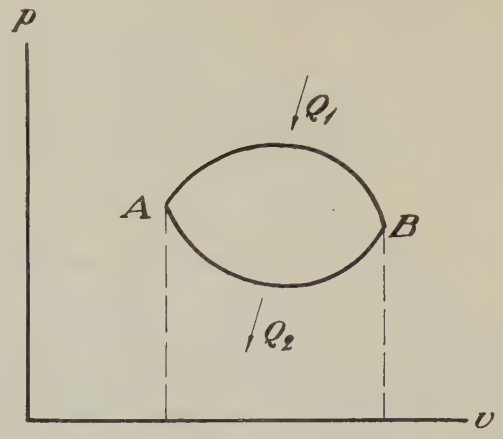


Fig. 2.

representeras av fig. 2. Man kan å diagrammet inlägga adiabater såsom fig. 3 visar. Två och två närliggande adiabater sammanbindas medelst isotermer såsom fig. 3 anger. Häri-

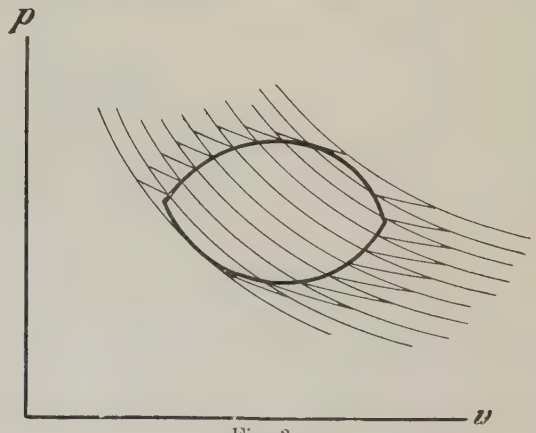


Fig. 3.

genom får man cirkelprocessen, fig. 2, ersatt av ett antal carnotska cirkelprocesser (*en sammansatt Carnotprocess*). Betecknas värmetillförseln under ett godtyckligt isotermele-

ment, där absoluta temperaturen är T, med ΔQ och entropiökningen under detta element med ΔS, är $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$. Entropiökningen under hela sicksackvägen $A-B$, under vilken värmemängden Q_1 tillföres, blir $\geq \frac{\Delta Q}{T}$. Ju tätare adiabaterna läggas, ju närmare kommer sicksackvägen, fig. 3, att sammanfalla med kroklinjen, fig. 2. Med användning av differential- och integralkalkylens beteckningssätt får man då genom vanlig limesövergång:

$$dS = \frac{dQ}{T} \text{ och } S_2 - S_1 = \int_A^B \frac{dQ}{T}.$$

Då en gas genomlöper en Carnots cirkelprocess, gäller såsom redan framhållits, att dess entropi ej ändras. Härav följer, att entropien hos en gas ej ändras, då den genomlöper en sammansatt Carnots process.

Ändras nu vid en sammansatt Carnotprocess den del av vägen, varunder värme tillföres, men ej den, varunder värme borttages, måste entropiökningen för de båda förra vägarna vara lika, då båda måste vara numeriskt lika med entropiminskningen för senare delen av cirkelprocessen.

Entropien är således en tillståndsstorhet, d. v. s. den är oberoende av den väg, på vilken tillståndet uppnåtts.

Denna sats ger oss ett medel att definiera en gas' entropi i en viss punkt. Vid användning av entropibegreppet är det alltid fråga om differenser ej om absoluta värden på entropien. För enkelhets skull kan man då välja godtyckliga värden på p_0 och v_0 och anse entropien vara lika med 0 för dessa värden. Dylika godtyckliga nollvärden förekomma inom många delar av fysiken, t. ex. nollpunkten för temperatur vid användning av Celsiusskalan, nollvärdet för lägeenergi (höjden mätes då från den punkt, dit kroppen kan falla på ifrågavarande ställe) o. s. v.

Med en gas' entropi i en viss punkt, B (för vissa värden

på p och v) menas då

$$S = \int_A^B \frac{dQ}{T},$$

då A är karakteriserat av de godtyckligt valda värdena p_0 och v_0.

Den enhet, varmed entropien mätes, är bestämd av de enheter, varmed värmemängden och den absoluta temperaturen mätas. Enklast kan den definieras, om man tänker sig viktsenheten gas undergå en isotermisk tillståndsförändring vid den absoluta temperaturen T. Enheten för entropi är då den entropiökning viktsenheten gas får, då den vid T graders temperatur tillföres T värmeenheter.

Härav synes omedelbart, att för praktiska behov denna enhet är för stor, och att man således i allmänhet har att syssla med bråkdelar av entropienheten.

1. Gasentropien vid isotermisk tillståndsförändring.

Vid isotermisk tillståndsförändring har man

$$dQ = Apdv \text{ (se G. § 100).}$$

Då $pv = RT$, är således

$$dS = \frac{AR}{v} dv.$$

$$\therefore S_2 - S_1 = AR\,({}^e\log v_2 - {}^e\log v_1) = AR\,{}^e\log \frac{v_2}{v_1}.$$

Med denna formel för S kan entropien från en viss utgångspunkt beräknas för olika tillstånd representerade av olika värden v_1, v_2, v_3 o. s. v. på specifika volymen och p_1, p_2, p_3... på specifika trycket vid en godtyckligt vald konstant temperatur T_1.

Då man vid tekniska beräkningar skall använda sig av entropien, brukar man inlägga de så beräknade värdena i ett entropitemperaturdiagram (temperaturen efter ordinataxeln). I ett dylikt diagram komma de så beräknade punkterna att ligga på en med abskissaxeln parallell linje. På

denna avsättes $\log v_1$, $\log v_2$, $\log v_3$ ... samt $\log p_1$, $\log p_2$, $\log p_3$ ...

För en annan temperatur T_2 erhålles för samma gas motsvarande linje på mot denna temperatur svarande avstånd från abskissaxeln. På denna nya linje avsättes såsom i förra fallet sp. volymer och tryck i logaritmisk skala.

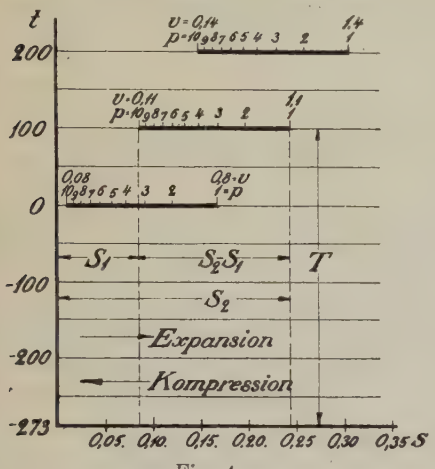


Fig. 4.

Då för denna temperatur $T_2 (T_2 > T_1)$ produkten pv har större värde än i förra fallet, komma motsvarande värden att ligga förskjutna från ordinataxeln såsom fig. 4 visar.

Enligt definitionen är $S = \int \frac{dQ}{T}$. I det nu behandlade fallet är T konstant och $= T_1$. Således $S = \frac{1}{T_1} \int dQ = \frac{Q}{T_1}$, då Q betyder det tillförda värmet från det tillstånd, då $S = 0$. Således $Q = ST_1$ och i allmänhet $Q = T_1 (S_2 - S_1)$, då S_2 och S_1 äro entropien för gasen omedelbart före och efter det värmemängden Q tillförts densamma.

Grafiskt representeras det tillförda värmet vid en isotermisk expansion i ett entropi-temperaturdiagram av ytan under den expansionslinje, som svarar mot ifrågavarande temperatur.

2. Gasentropien vid adiabatisk tillståndsförändring.

Denna tillståndsförändring är karaktäriserad av att $dQ = 0$ (se G. § 101, mom. c).

Enligt definitionen på entropi följer då, att $dS = 0$. Entropien ändras således ej vid en adiabatisk tillståndsförändring. I ett entropidiagram representeras följaktligen en

dylik tillståndsförändring av en rät linje, som är parallell med ordinataxeln.

3. Gasentropien vid en tillståndsförändring, då volymen är konstant.

Vid dylik tillståndsförändring användes allt tillfört värme till att höja gasens temperatur. Man har:

$$dQ = c_v dT$$

och således $Q = c_v (T_2 - T_1)$; (jämför G. § 98).

Insättes detta uttryck i den formel, som definierar entropien, erhålles

$$S_2 - S_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{c_v dT}{T} = c_v \log \frac{T_2}{T_1}.$$

Medelst formeln $pv = RT$ kan man ur senaste uttryck lätt få S som funktion av p i stället för av T, då v är konstant.

I ett entropidiagram representeras en dylik tillståndsförändring av en logaritmisk kurva fig. 5.

Det vid tillståndsförändringen tillförda värmet $Q = c_v (T_2 - T_1)$ representeras av ytan under tillståndslinjen.

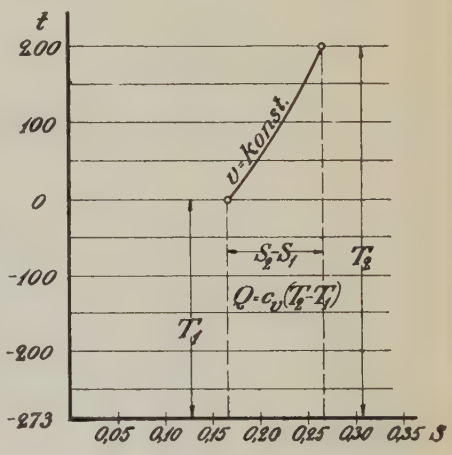


Fig. 5.

För att inse detta må man erinra sig definitionsekvationen $dS = \frac{dQ}{T}$, vilken kan skrivas $dQ = TdS$. Denna ekvation ger $Q = \int TdS$. Enligt integralkalkylen är $\int TdS$ den yta, som begränsas av kurvan (S, T), ordinaterna T_1 och T_2 samt abskissaxeln.

4. Gasentropien vid tillståndsförändring, då trycket är konstant.

Vid dylik tillståndsförändring gäller formeln:

$$dQ = c_v dT + A p dv \text{ (se G. § 99, mom. f.).}$$

Insättes detta uttryck i formeln $S = \int \frac{dQ}{T}$, fås

$$S_2 - S_1 = c_v \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + A \int_{v_1}^{v_2} \frac{p dv}{T} .$$

Tillämpas formeln $pv = RT$ med iakttagande av att p i detta fall är konstant, fås

$$S_2 - S_1 = c_v \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} + AR \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} = (c_v + AR) \log \frac{T_2}{T_1} .$$

$$= c_p \log \frac{T_2}{T_1} \text{ (G. § 97, mom. b.).}$$

Medelst formeln $pv = RT$ kan man ur senaste uttryck på entropien få denna som funktion av v i stället för av T, då p är konstant. Resultatet blir

$$S_2 - S_1 = c_p \log \frac{v_2}{v_1} .$$

I ett entropidiagram representeras denna ekvation av en logaritmisk kurva fig. 6.

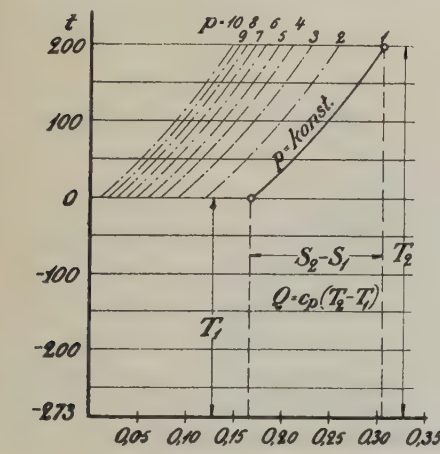


Fig. 6.

För andra tryck erhållas liknande kurvor. Vid uppritning av ett entropidiagram har man således blott att konstruera en linje för konstant tryck och

sedan för en viss temperatur beräkna två punkter på en kurva för ett annat tryck samt förskjuta den först konstruerade linjen så att den går genom dessa punkter. Fig. 6 visar en sådan linje i några olika lägen.

På samma sätt som vid senast behandlade tillståndsförändring inses, att den under kurvan liggande ytan representerar det under tillståndsförändringen tillförda värmet.

*

Ritas med samma axelsystem dels en kurva, som representerar tillståndsförändringen vid konstant tryck, dels en vid konstant volym samt väljas sådana värden på p och v för slutläget på kurvorna, att denna punkt blir gemensam för dem båda, och sker slutligen tillståndsförändringen mellan samma temperaturer, erhålles fig. 7. En enkel räkning visar, att förhållandet mellan entropiförändringarna i de båda fallen är $\frac{c_p}{c_v} = \varkappa$. Kurvan för v=konstant är brantare än kurvan för p=konstant.

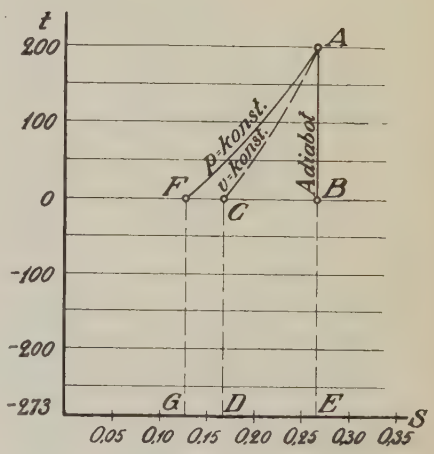


Fig. 7.

I entropidiagram är det vanligt, att linjer för konstant tryck äro heldragna och linjer för konstant volym prickade.

Enligt det sagda representerar ytan *FAEGF*, fig. 7, det värme, som åtgår för att vid konstant tryck uppvärma 1 kilogram gas från 0°—200°, ytan *CAEDC* det värme, som åtgår för att höja gasens temperatur från 0°—200° vid konstant volym (öka dess inre energi, jfr G. § 98). Ytan *FACDGF* representerar således det arbete, mätt i kalorier, som uträttats vid nämnda uppvärmning.

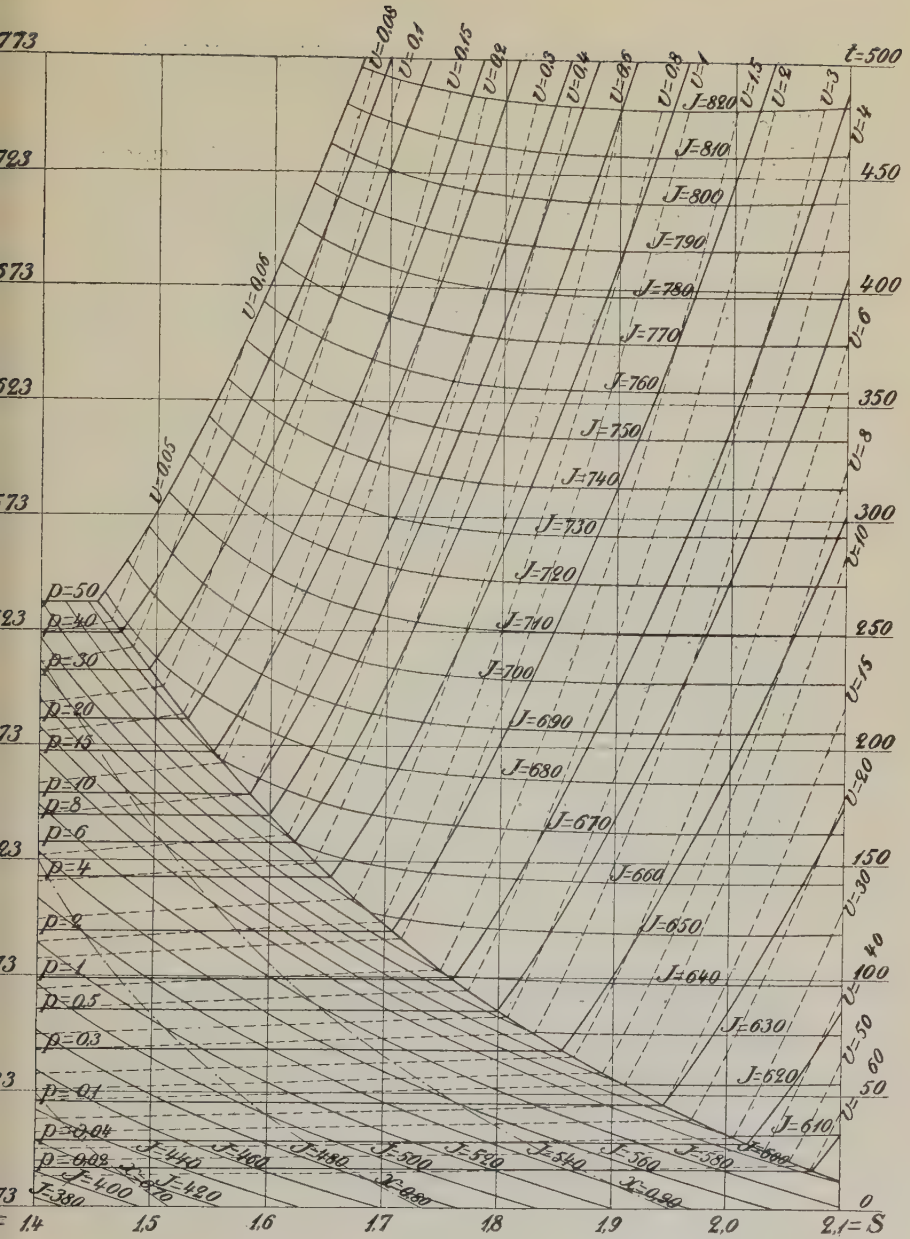

t=500
450
400
350
300
250
200
150
100
50
0
v=0,05
v=0,1
v=0,15
v=0,2
v=0,3
v=0,4
v=0,6
v=0,8
v=1
v=1,5
v=2
v=3
v=4
v=6
v=8
v=10
v=15
v=20
v=30
v=40
v=50
v=60
J=820
J=810
J=800
J=790
J=780
J=770
J=760
J=750
J=740
J=730
J=720
J=710
J=700
J=690
J=680
J=670
J=660
J=650
J=640
J=630
J=620
J=610
J=600
J=590
J=580
J=570
J=560
J=550
J=540
J=530
J=520
J=510
J=500
J=490
J=480
J=470
J=460
J=450
J=440
J=430
J=420
J=410
J=400
J=390
J=380
p=50
p=40
p=30
p=20
p=15
p=10
p=8
p=6
p=4
p=2
p=1
p=0,5
p=0,3
p=0,1
p=0,04
p=0,02
x=0,80
x=0,90
1,4
1,5
1,6
1,7
1,8
1,9
2,0
2,1=S

Fig. 8.

På samma sätt får man arbetet vid en adiabatisk tillståndsförändring. Man inlägger då i entropidiagrammet en linje v=konstant mellan ifrågavarande temperaturer T_1 och T_2. Ytan under denna kurva representerar det värme, som kräves för att vid konstant volym uppvärma gasen från T_1 till T_2, utan att den uträttar något arbete. Vid den adiabatiska expansionen omsättes denna energimängd i arbete.

Vid isotermisk tillståndsförändring ändras ej gasens inre energi; allt tillfört värme vid en sådan förändring omsättes således i arbete.

De uppmätta energimängderna erhållas vid planimetrering i kalorier, vilka lätt vid behov omräknas i arbetsenheter.

Anledningen till att entropibegreppet har så stor betydelse för värmeteknici är just, att de medelst entropidiagram kunna få reda på verkningsgraden vid en viss tillståndsförändring genom att planimetrera ett par ytor och beräkna förhållandet mellan dem.

För att vid dylika mätningar få tillräcklig noggrannhet korrigera ingenjörerna de kurvor, som gälla för ideella gaser, genom att taga hänsyn till de använda gasernas specifika egenskaper.

Fig. 8 visar ett entropidiagram för vattenånga. Den som önskar sätta sig in i, hur dylika diagram användas, må studera prof. Hubendicks nämnda böcker.

*

I denna uppsats har — såsom redan i inledningen angivits — blott den för teknici viktigaste egenskapen hos entropien behandlats. Då termodynamik får plats på programmet vid våra allmänna läroverk bör givetvis flera av dess egenskaper framhållas och andra användningar påpekas.

Varpå beror invarens bristande dilatation?

Av CARL BENEDICKS.

1. Inledning.

Att fasta kroppar utvidgas genom värmetillförsel är känt sedan äldsta tider; det lär omtalas av Hero av Alexandria år 100 e. Kr.[1] Från denna generella dilatationsregel finnes emellertid ett fåtal undantag, som därför äro desto mera anmärkningsvärda. Bland kända exempel på att en temperaturstegring kan medföra en sammandragning av en kropp kan nämnas det som föreligger för järn. Om en järnstav uppvärmes t. ex. från strax under 900° till något över 905°, äger i själva verket en stark sammandragning rum, vilken beror på att järnet övergår eller omvandlas från sitt vid lägre temperaturer stabila α-tillstånd till sitt vid högre temperaturer stabila γ-tillstånd, vilket sker under kraftig volymsminskning. Redan vid lägre temperaturer — c:a 750° — spåras hos järnet en starkt förminskad dilatation, som enligt författarens uppfattning måste tillskrivas en gradvis skeende, partiell övergång till γ-tillståndet. Vid

[1] Egendomligt nog har man knappast någon förklaring till detta för fysiken fundamentala förhållande, om, såsom vanligen sker, man tänker sig atomerna i den fasta kroppen bundna vid bestämda, av särskilda repellerande krafter betingade jämviktslägen, kring vilka de utföra harmoniska svängningar; en ökning av dessas amplitud behöver ju i själva verket icke öka avståndet mellan jämviktslägena. Om man däremot, såsom författaren gör, tänker sig den fasta kroppen uppbyggd utan dylika hypotetiska repellerande krafter, och atomerna därför underkastade ständiga kollisioner med grannarna — en uppfattning, som verkar klargörande i en hel del skilda hänseenden, icke minst rörande atomernas elektricitetsledning — kommer man omedelbart till resultatet att en förökning av atomernas kinetiska energi måste medföra en ökning av deras medelavstånd. (Jfr Ann. d. Physik 42, 42, 1913; Sv. kem. tidskr. 27, 136, 1915; Jahrb. d. Radioakt. 13, 351, 1916.)

vanlig temperatur däremot har järnet ju en normal utvidgningskoefficient.

Icke fullt så påfallande men allmänt känt är det förhållandet, att jodsilver vid rumstemperatur besitter en negativ utvidgningskoefficient. Författaren har sökt förklara detta förhållande genom hänvisning till de nyssnämnda förhållandena vid järn mellan 750—900°, d. v. s. genom antagande av att man har en stigande mängd av en annan modifikation av jodsilver förekommande i uppblandning med den vanliga. I enlighet härmed blev det också uppvisat, att jodsilver vid temperaturer under 0° har en positiv utvidgningskoefficient.[1] Jodsilver äger liksom järn vid 900° en tydlig allotropisk omvandlingspunkt (belägen vid + 150° C).

Synnerligen påfallande i dilatationshänseende är nu den anomali, som förekommer hos i n v a r, d. v. s. järnlegeringen med 36 % nickel. Det var ju upptäckten av dess dilatationsanomali, d. v. s. av det förhållandet att dess utvidgningskoefficient vid vanlig temperatur är mycket nära lika med 0, som 1920 tillförde *Guillaume* Nobelpriset. Någon teoretisk förklaring till den bristande utvidgningen synes Guillaume icke hava försökt giva.

För vinnande av en dylik förklaring antog *P. Chevenard*[2] (1904), att en inre jämvikt skulle förekomma i denna legering, som enligt alla tidigare undersökningar ansetts homogen, d. v. s. bestående av en enda fas. Vid förskjutning av denna molekylära jämvikt, mellan tvenne supponerade olika molekylslag, antogs också en volymsminskning äga rum vid upphettning. I sig självt fullt rimlig har denna hypotes felet att vara uppgjord helt för ändamålet och icke stödas av några andra förhållanden.

Honda och *Takagi*[3] hava därför sökt lämna en förklaring till densamma på ett annat sätt, nämligen genom antagandet att den sammandragning, som för järnet äger rum vid 900°,

[1] *C. Benedicks*, Jernkont. Annaler 1912, 489; Journ. Iron and Steel Inst. 1912: II, 242.
[2] *P. Chevenard*, Rev. de Métallurgie 11, 841, 1914.
[3] *K. Honda* o. *H. Takagi*, Journ. Iron and Steel Inst. 1919: II, 353.

för invaren vore sänkt till rumstemperatur. Man vet emellertid tack vare en hel rad olika forskare, att den ifrågavarande omvandlingspunkten vid en nickelhalt av 36 % måste ligga nära 400° C. Teorin kan därför knappast betraktas såsom tillfredsställande.

2. Teori för dilatationsanomalin.

Nu har man, såsom redan nämnts, ansett att invaren är en homogen legering, bestående av en enda fas. Skulle den däremot i själva verket innehålla två faser, kan man, såsom vi skola klargöra, lätt vinna en enkel förklaring till dilatationsanomalin.

Även rörande nickel-järnlegeringarna överhuvudtaget hade man tidigare antagit, att de äro homogena, d. v. s. bestå av en enda fas, en fast lösning av järn och nickel i alla proportioner. Från denna ståndpunkt var det ett olösligt problem, hurusom man faktiskt i meteorjärn, d. v. s. nickellegeringar med omkr. 5—16 % Ni, kunde finna tvenne tydligt urskilda faser, varav den ena — kamacit — har låg nickelhalt och motsvarar α-järn, den andra — taenit — har hög Ni-halt och motsvarar γ-järn i kristallografiskt hänseende.

Emellertid lyckades författaren[1] 1910 uppvisa, att man genom en tillräckligt långsam avkylning av en legering, som innehöll 12 % Ni, kunde erhålla en oomtvistlig uppdelning i två faser.

Liknande iakttagelser hava senare gjorts av *Hanson* och *Hanson*[2], vilka visat, att dylik uppdelning äger rum för Ni-halter mellan 9 och ända upp till 30 %. Likaledes har det genom *McKeehans*[3] röntgenanalytiska undersökningar uppvisats, att tvenne faser föreligga inom sagda koncentrationsgränser.

[1] *C. Benedicks*, Nova Acta Reg. Soc. Scient. Ups. Ser. IV 2, n:r 10, 1910; Populär Naturv. Revy 4, 151, 1914.
[2] *D. Hanson and H. Hanson*, Journ. Iron and Steel Inst. 1920: II, 39; Collect. Res. Nat. Phys. Labor. 16, 237, 1921.
[3] *L. W. McKeehan*, Physical Rev. 21, 402, 1923.

Om det alltså är säkerställt, att en järn-nickellegering även med 30 % Ni efter långsam avkylning innehåller två faser, funnos dock inga tecken på att detsamma skulle gälla vid en nickelhalt av 36 %. Klart är emellertid, att den mängd av den järnrikare fasen (kamacit), som kan förväntas, måste vara ganska ringa, varför det ej synes uteslutet, att den kunnat förbises vid tidigare undersökningar, i synnerhet som skillnaden i utseende och angriplighet är ringa.

Låt oss emellertid genast framhålla, att man kan vinna en enkel förklaring på invarens dilatationsanomali, om man har rättighet att antaga att densamma jämte en övervägande del γ-fas även innehåller en del fint fördelad α-fas. Av McKeehans bestämningar kan man sluta sig till att den betydliga kontraktion, som åtföljer övergången från α-järn till γ-järn, blir c:a 6 ggr större vid en Ni-halt av omkring 35 %. Härav är det tydligt, att även en helt ringa övergång från α-fasen till γ-fasen, ägande rum vid temperaturstegring, skulle kunna kompensera den dilatation, som bägge faserna i och för sig måste undergå.

Av denna enkla teori för dilatationsanomalin hos invar framgår för det första, att den supponerade α-fasen måste befinna sig i mycket fin fördelning inom γ-fasen: eljest skulle reaktionen, d. v. s. kontraktionen, taga så lång tid, att densamma icke rimligen kunde hinna kompensera den normala utvidgningen.

Å andra sidan är det emellertid klart, att om man sörjer för att man kan observera dilatationen omedelbart efter en temperaturstegring, man kommer — om denna förklaring är riktig — att först kunna iakttaga en betydande dilatation, som först senare går tillbaka. Den experimentella behandlingen av problemet var given i och med dessa bägge konsekvenser.

3. Mikroskopisk undersökning med förbättrade hjalpmedel visa närvaron av två faser.

Av det anförda är det klart, att den mikroskopiska analysen måste drivas till en viss förfining, om man skall kunna hava någon utsikt att iakttaga den ringa mängden av den antagna γ-fasen.

Den mikroskopiska metodiken, som kommit till användande, utnyttjade tvenne omständigheter, som väsentligt bidragit att öka iakttagelseskärpan[1]. Dels är det nödvändigt, för att kunna iakttaga små strukturelement, att mikroskopet är väl skyddat mot vibrationer — på grund av den skakning, som äger rum i närheten av trafikerad gata (såsom t. ex. fallet är vid Metallografiska institutet på grund av trafiken från Drottninggatan) får man långtifrån den vibrationsfrihet, som behöves. Detta ernåddes emellertid genom att på det metallografiska mikroskopet använda den princip, som i enlighet med *Julius* gäller en skakfri uppställning av en galvanometer. Denna visade sig möjlig att med stor framgång tillämpa även för metallmikroskopet: detsamma bör anbringas å fjädrande underlag, icke som hittills försökts, längst ned (på apparatens ställskruvar) utan i ett betydligt högre upp beläget plan, som går igenom instrumentets skakkänsliga del (i närheten av objektivet, resp. slidföringen), och vidare bör instrumentets tyndpunkt, genom påläggning av vikter, bringas att ungefär sammanfalla med detta plan. Den skakkänsliga delen kommer vid dylik anordning så att säga midskepps, och yttre skakning visar sig så gott som utan inflytande.

Den andra förbättringen vid mikroskopets användande bestod i införandet av en speciell bländare. Konstruktionen, närmast av *P. Sederholm*, utgör en icke oväsentlig förbättring av en bländaranordning, som använts av *H. S. George*[2], och är uppbyggd på följande sätt. Av det använda

[1] *C. Benedicks o. P. Cederholm*, Jernkont. Annaler 109, 337, 1925.
[2] *H. S. George*, Trans. Amer. Soc. Steel Treating 4, 140, 1925.

ljusknippet borttages en central del genom en liten centralt anbragt cirkelrund skiva, »epiphragma» (med olika diametrar). Av det återstående ringformiga ljusknippet avskärmas en viss del med tillhjälp av en variabel sektorbländare. Genom denna anordning erhåller man en ypperlig reliefverkan hos bilden av metallytan — som aldrig ligger alldeles i ett plan. Genom anordningen kan man t. ex. påvisa tillvaron av ytterst små hålrum i kolstål, vilka eljest ej kunnat observeras.[1]

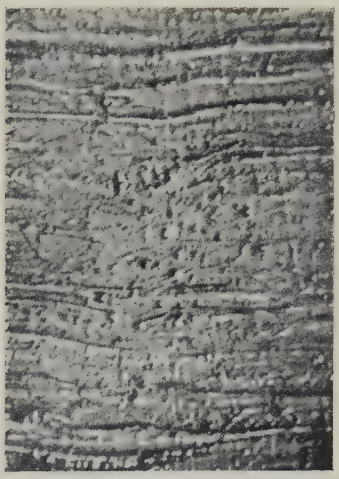


Fig. 1. 1 200 ×

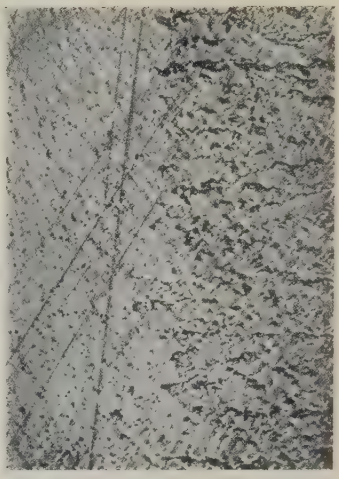


Fig. 2. 150 ×

Betraktat på vanligt sätt utvisar ett prov av invar icke någon speciellt karakteristisk struktur utan verkar fullt homogent — möjligen med bortseende av en del slagginneslutningar. När nu ytan etsades med en mycket utspädd syra under en timmes tid, framkom dels (fig. 1) en tydlig fibrös struktur, som utvisar, att metallen undergått en kraftig kallbearbetning. Metallen utgjordes i själva verket av en 1,6 mm tjock invartråd, som användes för geodetiskt ändamål (enligt *Jäderin*). Dessutom framträder jämte denna

[1] *C. Benedicks o. P. Sederholm*, Jernkont. Annaler (inlämnat).

fibrösa struktur även en mängd små strukturelement, som utgöras av fördjupade delar (belysningen är i fig. 1 att tänka sig såsom kommande från vänster). Det förefaller, som om dessa små håligheter uppkommit genom bortlösande av en järnrikare, finfördelad fas, såsom man väntat. Å en endast polerad yta, där alltså inga utlösningar ägt rum, kunde man med användande av tjänligt ljusfilter iakttaga en svag färgskillnad, svarande mot dylika järnrikare partiklar. Emellertid är även efter etsning skillnaden i utseende, d. v. s. i färg, ytterst ringa mellan legering av olika nickelhalt.

Därför tillgreps en etsningsmetod, som prövades av fil. kand. *E. Walldow*, och som kännetecknas på följande sätt.

Metallpreparatets yta överdrages med ett tunt gelatinlager, vilket garvas. Detsamma genomdränkes med utspädd syra (HNO_3) i alkoholisk lösning. Den därvid upplösta metallmängden kan på grund av gelatinskiktets närvaro icke bortföras utan kvarstannar på ort och ställe, i gelatinskiktet. Genom användande av lämpligt kemiskt reagens, såsom i detta fall ferrocyankalium, kan man tydligt framkalla en struktur, som här beror på mängden järn, som gått i lösning på olika ställen. Fig. 4 utvisar resultatet av en dylik behandling. Det framgår med full tydlighet, att järnhalten icke varit jämnt fördelad i legeringen utan tvärtom är olika koncentrerad på olika ställen. Efter avlägsnande av gelatinskiktet konstaterades (fig. 3), att de ställen, som visat sig särskilt järnrika, d. v. s. starkt blåfärgade, innehålla särskilt mycket av de små, i fig. 1 återgivna håligheterna. Denna undersökningsmetod styrker alltså, att dessa små håligheter uppkomma tack vare bortlösande av en järnrikare fas, kamacit.

En ytterligare bekräftelse på denna tolkning framgår av fig. 2, som återger en på samma sätt etsad yta av en legering med 30,5 % Ni. Vid denna halt har, såsom vi redan sett, existensen av två faser fastslagits genom tidigare arbeten (Hanson och Hanson, McKeehan). De utlösta delarna äro i allmänhet — såsom till höger å figuren synes — rätt

avsevärt stora. Närmare ytan — bildens vänstra del — har, tydligen på grund av oxidation, en minskning av järnmängden ägt rum, så att nickelhalten stigit. Här förekommande, genom etsningen uppkomna håligheter överensstämma nära med dem, som avbildas i fig. 1.

Genom denna granskning kan det anses hava blivit konstaterat, att invaren icke, som man hittills antagit, är en verkligt homogen legering, utan att den jämte en över-

Fig. 3. 1 000 ×

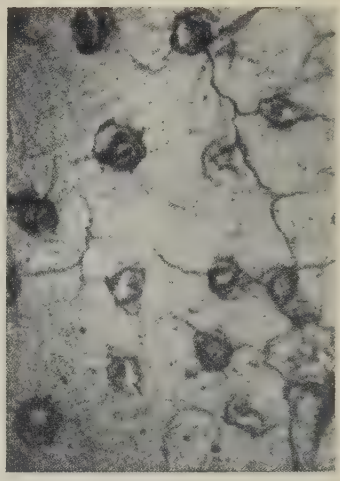


Fig. 4. 1 000 ×

vägande nickelrikare γ-fas även innehåller helt små partier av en järnrikare α-fas — såsom vi förutsatt vid den skisserade teorin för invar.

4. Hysteres vid invarens dilatation.

Vi komma nu till redogörelsen för en experimentell behandling, föranledd av den anförda slutsatsen, att invarens dilatation bör vara en funktion av uppvärmningshastigheten, resp. avkylningshastigheten, såvida den före-

slagna teorin är riktig.[1] Man kan med andra ord vänta sig uppträdandet av en tydlig hysteres i dilatationshänseende, om man har att göra med övergång från en fas till en annan. Emellertid var det uppenbarligen nödvändigt att hava en högkänslig dilatationsapparat till förfogande.

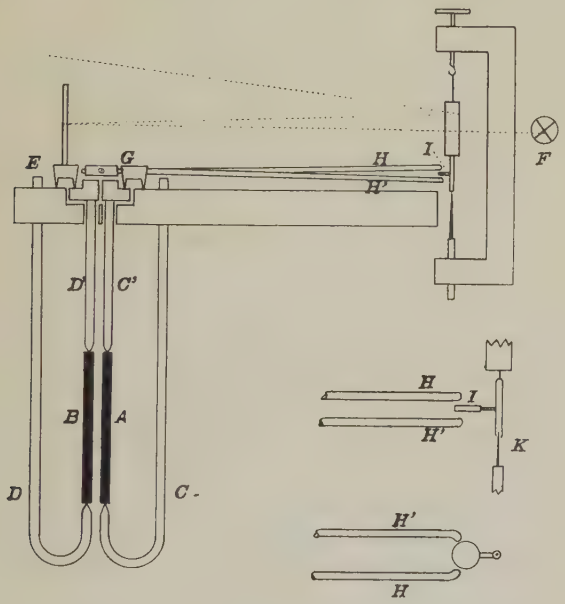


Fig. 5.

Den använda apparaturen byggdes på följande sätt, fig. 5. *A* representerar invarprovet, som hålles fast mellan en omböjd kvartsstav *C* och en rörlig sådan, *C'*, vilken påverkar en olikarmad hävstångsindex *G*. För att åstadkomma en fullt pålitlig temperaturmätning var bredvid invarprovet placerad en lika lång stav av platina, *B*, fasthållen på samma vis mellan kvartsstavarna *D* och *D'* och påverkande en spegel *E*, som i ett vertikalplan devierar strå-

[1] *C. Benedicks o. P. Sederholm,* Ark. f. mat. astr. o. fysik. Bd 19 B, n:r 1, 1925.

larna från en ljuskälla *F*. Platinastaven tjänstgör alltså som termometer För att erhålla tillräcklig förstoring av invarens utvidgning är den lilla, å tre punkter vilande delen *G* försedd med tvenne långa, utbalanserade magnetiska nålar *H*, *H'*. Symmetriskt mellan dessa ändar befinner sig en liten horisontal skiva *I* av permalloy — den numera mycket omtalade järn-nickellegeringen med 78 % Ni, som utmärkes av en försvinnande ringa magnetisk hysteres. Denna skiva *I* är jämte en spegel fastsatt å en glaskapillar, som hänger i en kvartstråd; skarpt definierat läge erhålles genom en fin nål *K*. De fria ändarna *H* och *H'* kunna justeras, så att *H* ligger något högre än *H'*. Om bägge på grund av *A*'s dilatation röras nedåt, kommer avståndet mellan den lilla plattan *I* och *H* att minskas, vilket medför (se nedre delen av fig. 5) att *I* vrides en viss vinkel motsols, därigenom förorsakande ett horisontalt utslag av ljusfläcken. På grund av frånvaron av magnetisk hysteres i permalloy är läget av *I* strängt definierat; genom att inställa det vertikala avståndet mellan *H* och *H'* olika kan man erhålla vilket önskat förhållande man vill mellan den i vertikalplanet skeende vridningen av *G* och den i horisontalplanet skeende vridningen av *I*. Genom direkt projicierande på en skärm erhöllos temperaturerna som ordinator och dilatationerna som abscissor. I princip är denna anordning en förbättring av den anordning, som användes av den indiske botanisten Sir *Jagadis Bose* för bestämning av växters tillväxthastighet.

Den förstoring, som kom till användning vid denna apparat, utgjorde 12 000 ×, varvid den använda skärmen stod på ett avstånd av 2 m från tillhörande spegel.

Vid de första försöken uppvärmdes apparatens nedre del av en liten elektrisk ugn. Den dilatation, som framkom, utgjorde alltså dilatationsskillnaden mellan invarprovet *A* och motsvarande längd av kvartsstaven *C*.

Det första erhållna resultatet framgår av fig. 6, som visar, att skillnaden i utvidgningen mellan invar och smält

kvarts har givit en kurva, som innebär en påtaglig hysteres i dilatationshänseende.

Denna hysteresslinga kunde knappast få någon annan tolkning, än att den motsvarade överlagringen av den smälta kvartsens dilatation (å figuren angiven genom kurvan *I*) och en dilatation hos invarprovet (åskådliggjord genom kurvan *II*).

Denna tolkning kunde emellertid icke anses vara fullt säker, och det var därför önskligt att mäta invarprovets

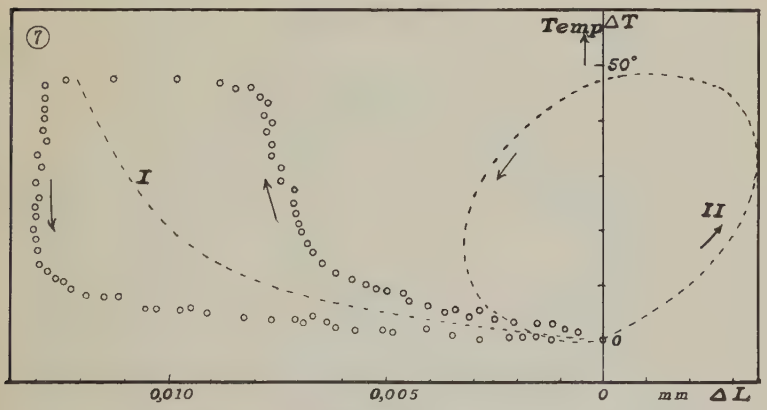


Fig. 6.

egen dilatation, oberoende av den smälta kvartsens. För detta ändamål omlindades platinatråden så att dess diameter blev 1,6 mm, liksom invarprovets, varefter bägge förseddes med ett lager av en tunn, silkesisolerad manganintråd. Då samma elektriska ström sändes genom bägge dessa lindningar, måste de uppvärmas till samma temperatur; denna bestämdes särskilt såsom funktion av strömstyrkan. Då proven *A* och *B* med sina resp. värmelindningar placerades i de gamla lägena, var det en lätt sak att upphetta dem och därvid skydda kvartsstavarna *C* och *D* från varje nämnvärd uppvärmning.

Med denna anordning erhölls det slutliga resultat, som

är angivet i fig. 7. Såsom man redan vid en flyktig granskning ser, motsvarar den här erhållna hysteresslingan ganska väl den kurva *II*, som deducerats ur föregående experiment, fig. 6.

En närmare granskning av fig. 7 visar följande (å fig. angivna siffror utvisa tiden i min.): Omedelbart efter uppvärmningens påbörjande följer invarens dilatation en kurva, vars tangent bildar en kraftig vinkel med temperaturaxeln, men redan efter en helt kort tid (ett tiotal sek.) avvika de

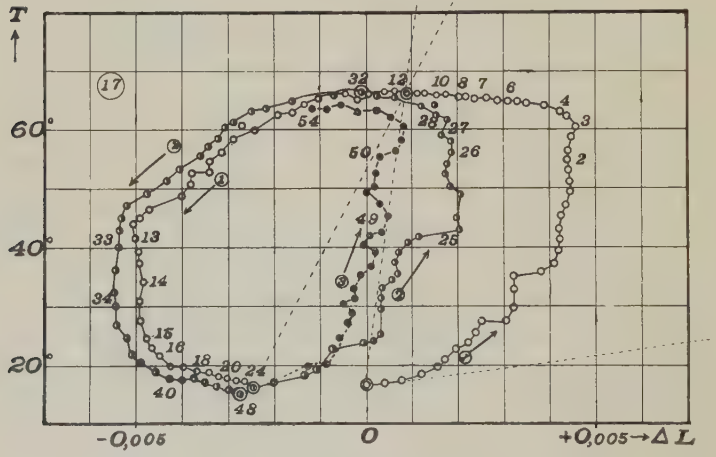


Fig. 7.

observerade punkterna (tomma cirklar) från den ursprungliga tangentriktningen, angivande, att dilatationen blir allt mindre. Efter förloppet av 3 min. visar det sig, att en högst betydande kontraktion vidtager, vilken först efter 12 minuters förlopp praktiskt taget kommer till stillestånd (här dubbla cirklar). Då därefter uppvärmningsströmmen brytes och temperaturen alltså hastigt sjunker, visar det sig, att en synnerligen kraftig kontraktion inträder, som emellertid successivt avtager i styrka. Efter en tid av något mer än 14 min. övergår denna kontraktion till en dilatation, som efter 24 min. visar sig mycket ringa. Då därefter ny upp-

värmning vidtogs, erhölls väsentligt samma dilatationsförlopp (halvfyllda cirklar). Efter 32 min. gjordes avsvalning; efter 48 min. en tredje uppvärmning (helfyllda cirklar). Den funna gången av dilatationen motsvarar det av den framställda teorin fordrade förloppet.

Vad som förefaller förvånande är, att längdändringar av den storlek, som nu observerats, kunnat undgå tidigare observatörer, trots den ytterliga noggrannhet, som av dem använts. Emellertid kan detta sakförhållande lätt förklaras: just på grund av den stora noggrannheten, som åsyftats — och som alltid vid dylika fysikaliska precisionsmätningar — har man för att erhålla fullt pålitliga temperaturvärden väntat en lång tid, innan längdmätningarna utförts. Givetvis är en dylik lång väntetid oundgängligen nödvändig i samma mån som tjocka stavar komma till användning. Vid tidigare mätningar har man i enlighet härmed låtit riklig tid förflyta, så att jämvikt emellan de bägge faserna fått tid att inställa sig före mätningens utförande.

Att de skilda slingorna å fig. 7 successivt förflytta sig åt vänster, vilket motsvarar en viss resulterande sammandragning hos invarprovet, torde vara beroende på att den omvandling, som sker vid den högre temperaturen, måste gå fortare än samma omvandling i motsatt led vid den lägre temperaturen Är så fallet, bör, om proven få vara lika länge vid den högre som vid den lägre temperaturen, en viss sammandragning kunna förväntas.

De i fig. 7 framställda observationerna kunna nu användas för kvantitativ uppmätning av dilatationen. Av den prickade linjen, som anger dilatationen i första ögonblicket, finner man, att den sanna värmeutvidgningskoefficienten vid uppvärmningens början, eller initialdilatationskoefficienten, uppgår till ett värde av

$$\beta = 13 \cdot 10^{-6} \pm 1 \cdot 10^{-6};$$

för järn, resp. nickel har man

$$\beta_{Fe} = 12 \cdot 10^{-6} \text{ och}$$
$$\beta_{Ni} = 13 \cdot 10^{-6}.$$

För en legering, i vilken icke någon omvandlingskontraktion förefinnes, har man alltså att vänta ett dilatationsvärde mellan

$$12 \text{ och } 13 \cdot 10^{-6},$$

vilket inom mätgränserna bekräftas av det funna värdet.

För beräkning av den skenbara eller resulterande dilatationen kan man använda sig av punkterna 0 och 12 eller av punkterna 12 och 24. Härigenom erhållas värden på den skenbara eller resulterande dilatationen uppgående till

$$\bar{\beta} = 0{,}22 \cdot 10^{-6}, \text{ resp.}$$
$$\bar{\beta} = 0{,}82 \cdot 10^{-6}.$$

Enligt uppgift i senaste upplaga av *Landolt-Börnstein* kan man räkna med en värmeutvidgningskoefficient

$$\bar{\beta} = 0{,}44 \cdot 10^{-6},$$

vilket värde ju ligger inom de nyss funna gränserna.

Resultatet av de dilatometriska mätningarna har alltså till fullo bekräftat den slutsats, till vilken man av den föreslagna teorin för invarens dilatationsanomali kommit, varför densamma måste sägas hava vunnit ett gott stöd. Någon full säkerhet kan naturligtvis icke vinnas, innan man ur denna synpunkt skärskådat även andra nickellegeringar än den med 36 %. Beklagligtvis nog hava icke annat än ett ringa fåtal dylika, direkta dilatationskurvor publicerats, varför en dylik jämförande undersökning knappast kan utföras för närvarande. Någon säker giltighet kan därför icke anses tillkomma den framställda teorin, men tydligt är, att vi hava goda skäl för uppfattningen, att invarens märkliga egenskap av att ha en försvinnande dilatationskoefficient kan få en enkel förklaring i enlighet med det anförda.

Vi äro med andra ord berättigade att säga, att *det låga värdet av invarens dilatation kan förklaras därigenom att vid temperaturstegring en förskjutning mellan tvenne faser äger rum under en kontraktion, som väsentligen kompenserar den normala dilatationen.*

Stockholm, Metallografiska institutet, november 1925.

En omtvistad figur i optiken.

Av CONRAD LÖNNQVIST.

Följande rader avse att fästa uppmärksamheten på ett fenomen i optiken, som beskrives olika i olika läroböcker. Det gäller det skenbara läget och utseendet av ett föremål i vatten, som betraktas av ett öga ovanför vattenytan.

Moll anger i sin lärobok både med figur och text, att föremålet synes icke endast lyftat *närmare vattenytan* utan också horisontellt förskjutet och detta *i riktning mot ögat.* Det tillägges, att en käpp, som nedstickes i vatten, synes avbruten. Käppens nedre ände skall naturligtvis då synas dels upplyftad, dels förskjuten i sidled åt ögat till.

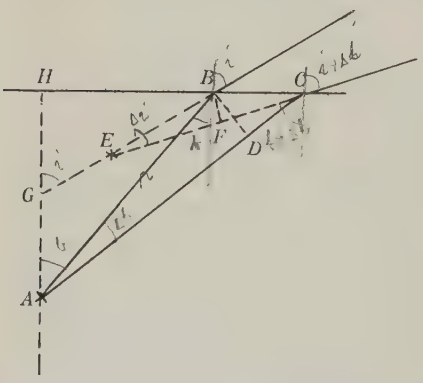
Går man emellertid till andra läroböcker, finner man i flertalet fall en avvikande eller t. o. m. rakt motsatt framställning. En del läroböcker för realskolan omtala endast den vertikala förskjutningen, och tillhörande figurer visa heller icke någon som helst förskjutning i horisontell led. Författarna ha väl ansett, att den horisontala förskjutningen är så obetydlig, att den kan lämnas ur räkningen. Detta är emellertid i de flesta fall icke riktigt, såsom nedan visas. Andra läroböcker uppvisa den horisontala förskjutningen om icke i texten så i figur, men förskjutningen anges ske *i rakt motsatt riktning mot den av Moll påstådda*, sålunda *bort från ögat.* Denna framställning förekommer även i ett par nyutkomna läroböcker i fysik för realgymnasiet.

Av utländska läroböcker är väl i främsta rummet att nämna Grimsehls Lehrbuch der Physik (5:e uppl. 1924), en förträfflig och mycket anlitad bok, numera även läst vid våra universitet. Grimsehl har tvenne hithörande figurer. Den ena

visar en slant i vatten skenbart upplyftad och därtill förskjuten i sidled *bort från åskådaren*, den andra en käpp i vatten skenbart avbruten, med nedre änden dels upplyftad och dels likaså förskjuten *bort från ögat*.[1] Man tar kanske icke fel, om man antar, att åtminstone en del av de nyssnämnda svenska läroböckerna fått sina figurer påverkade av dessa Grimsehls figurer. (En av de nyutkomna läroböckerna för gymnasiet har t. o. m. reproducerat Grimsehls figurer.) Författarna ha tydligen givit Grimsehl vitsord framför Moll. — De, som eliminerat den horisontala förskjutningen, ha möjligen i valet mellan båda gått den gyllene medelvägen och nöjt sig med den vertikala förskjutningen.

Men vem har då rätt? Svaret måste bli: det är *Moll*, som har *rätt*, och *Grimsehl*, som har *fel*. Det är ingen svårighet att uppvisa den saken:

Låt AB och AC vara två strålar, som gå från den under vattnet befintliga punkten A till vattenytan, och låt dem bilda infallsvinklarna $i - \Delta i$ och i. Med varandra bilda de alltså vinkeln Δi. Drag $BD \perp AC$. Då är $\angle CBD = i$. Om avståndet $AB = r$, så är $BD = r \sin \Delta i$ eller, om små storheter av högre ordning försummas, $BD = r\Delta i$. Därav erhålles $BC = \frac{r\Delta i}{\cos i}$.



Man kan nu erhålla ett annat uttryck för BC, om man drar ut de brutna strålarna, tills de träffas i E. De bilda med varandra en vinkel Δb, om brytningsvinklarna äro $b - \Delta b$ och b. Fälles $BF \perp CE$, så är $BF = x\Delta b$, om $BE = x$. Då $\angle CBF = b$, så blir slutligen $BC = \frac{x\Delta b}{\cos b}$.

[1] I texten omnämnes endast den vertikala förskjutningen.

Sättas de båda uttrycken för BC lika, så får man efter limesövergång, att

$$\frac{r\,di}{\cos i} = \frac{x\,db}{\cos b} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Om man vidare differentierar brytningslagen

$$\sin b = n \sin i,$$

finner man åter

$$n \cos i\,di = \cos b\,db \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Divideras nu ekvationen (1) med (2), erhålles, att

$$\frac{r}{n\cos^2 i} = \frac{x}{\cos^2 b}.$$

Men $\frac{r}{n}$ i denna ekvation betyder i själva verket ingenting annat än sträckan BG, som erhålles, om BE utdrages till vertikalen AH genom A, vilket man lätt övertygar sig om ur de båda rätvinkliga trianglarna BAH och BGH.

Betecknas detta avstånd BG med y, så har man till sist ekvationen

$$\frac{y}{\cos^2 i} = \frac{x}{\cos^2 b},$$

som utgör problemets lösning.

Då i alltid är mindre än b, så är alltid x mindre än y. Det inträffar sålunda *alltid en horisontell förskjutning mot ögat.* (Fallet $i = b = 0$ lämnas därvid å sido, då det självklart endast ger förskjutning vinkelrätt mot den brytande ytan).

Så länge vinklarna i och b äro små, är givetvis förskjutningen i riktning mot ögat jämförelsevis obetydlig. Men redan för $b = 45°$ är den avsevärd. En enkel kalkyl ger för övrigt med $\frac{4}{3}$ som värde på n:

för $b = 30°$ $\quad \frac{x}{y} = 0{,}873$

» $b = 45°$ $\quad \frac{x}{y} = 0{,}696$

$$\text{för } b=60^\circ \quad \frac{x}{y}=0{,}432$$

$$\text{» } b=80^\circ \quad \frac{x}{y}=0{,}066.$$

För gränsfallet $b=90^\circ$ blir slutligen $\frac{x}{y}=0$.

En konsekvens av den här bevisade lagen kan förtjäna framhållas, nämligen den att en käpp kan stickas ned i vatten i en sådan riktning i förhållande till ögat, att den endast synes förkortad, men icke avbruten. Hålles nämligen käppen i riktningen AE i figuren, så synas alla dess punkter förskjutna uppåt i käppens längdriktning, och käppen synes förkortad men ej bruten. Därvid förutsättes givetvis, att de strålar, som nå ögat från olika delar av käppen, komma i approximativt samma riktning till ögat och därför undergått likartad brytning. Ögats avstånd från käppen bör alltså vara stort i förhållande till käppens längd. Ty annars bli förhållandena mera komplicerade.

Det finns naturligtvis också ett läge, då käppen synes avbruten men varken förlängd eller förkortad. Drages mittpunktsnormalen till AE, tills den träffar vattenytan i en punkt I, så är IA den sökta riktningen av käppen i detta fall, detta givetvis under samma förutsättning som nyss.

Till sist må nämnas, att ett par andra tyska läroböcker än den ovannämnda, nämligen »Oberstufe» och »Unterstufe der Naturlehre» av Fr. Poske, ha figurer, som riktigt visa bildens förskjutning i flera olika fall. Fenomenet i fråga synes alltså vara lika omtvistat — på för övrigt oförklarliga grunder — i den tyska som i den svenska lärobokslitteraturen.

Katarina realskola i oktober 1925.

Bestämning av vattenångans tryck vid olika temperaturer.

Av ERNST FOGHAMMAR.

Vill man på en lektionstimme visa hur värdena i Regnaults tabell erhållas, kan man knappast följa den i Molls lärobok föreslagna metoden. Där finnes en figur, som visar, hur man skall förfara vid temperaturer under 0°. De säkerligen högst få lärare, som gjort detta försök, ha nog funnit det svårt att få ut kvicksilvret från den omböjda i köldblandningen nedsänkta delen av glasröret. För temperaturer mellan 0° och 100° föreslås, att man skall omgiva det i en öppen kvicksilverskål stående barometerröret med en glasmantel, varigenom ledes varmt vatten. Detta är även besvärligt och detta viktiga område blir kanske endast teoretiskt behandlat, sedan möjligen några försök gjorts för att visa, att eterångans tryck stiger med temperaturen.

Då undertecknad använt sig av en apparat, som är enkel både att förfärdiga och använda och som även under en kort lektionstimme giver nästan exakt Regnaults värden, torde den erbjuda ett mer allmänt intresse.

Ett omkring 17 dm långt glasrör av c:a 8 mm genomskärning tillsmältes i A och böjes över en fiskstjärtbrännare med liten låga vid BC c:a 8 dm från den tillslutna änden. Då avståndet mellan delarna AB och CD bör vara så litet som möjligt, kan man efter böjningen på nytt över större låga uppvärma vid BC och genom en lätt tryckning föra ihop rören. Nu hälles kvicksilvret i,

och, medan man med fingret håller för vid D, kan man genom att vända och skaka på röret få allt kvicksilvret till delen AB, varefter man utan svårighet också kan få in en droppe vatten i det »Torricelliska tomrummet». Ett 9 dm långt och minst 2 cm vitt glasrör tillsmältes vid E. Häri hälles vatten varefter barometern nedsänkes. Termometerkulan bör vid försöken hållas vid F, där det kondenserade vattnet finnes. Man kan uppvärma det yttre röret direkt med en bunsenlåga från övre ytan till några cm nedanför F. Då det för försöket inte har någon större betydelse ifall denna uppvärmning är ojämn behövs ingen omrörare. Då man vill göra en försöksserie för temperaturer mellan c:a 20° och 100° uppvärmer man till kokning och låter sedan vattnet så småningom svalna. Intill röret är en i mm graderad linjal uppställd och för observationerna äro tre lärjungar sysselsatta. Den som avläser temperaturen lyfter undan för undan på termometern så att den följer vätskedroppen vid F. Vid varje grad avläsa de två övriga observatörerna läget av ytorna F och G, varefter en tabell uppskrives: temperatur, läget av F, läget av G, kvicksilverpelaren GF, barometerståndet — GF och för jämförelse Regnaults värde. Som redan nämnt blir överensstämmelsen god. En fördel med denna apparat är, att den även kan användas vid lägre temperaturer än 0°, då man endast behöver upplösa salt i isvatten, som hällts i röret, och vid temperaturer över 100°, då man i stället för vatten har t. ex. paraffinolja.

Högre Latinläroverket, Göteborg den 9 mars 1925.

Urladdning i förtunnade gaser.

Av ERNST FOGHAMMAR.

Vid många av våra läroverk finns ej möjlighet att förtunna luften mer än till 7 à 8 mm tryck medelst de förtunningspumpar, som stå till buds. När det gäller att göra försök på elektrisk urladdning i förtunnade gaser, visar man då endast detta medelst redan utpumpade rör. Detta försök kan emellertid göras framgångsrikt även med synnerligen enkla hjälpmedel.

Ett meterlångt rör av minst 6 mm genomskärning upphettas i ena ändan i en bunsenlåga. När hålet nästan helt fallit ihop, införes därigenom en c:a 2 cm lång platinatråd, varefter det hela tillsmältes. En dm från ändan uppvärmes nu röret försiktigt på ena sidan och samtidigt blåses genom den öppna ändan med hjälp av en blåsbälg, varvid ett fint runt hål uppstår. Kring en ny platinatråd smältes nu nära mitten fast en glaspärla av hålets storlek genom att linda en smal smält glastråd ett tillräckligt antal gånger kring tråden. Tråden med glaspärlan införes i hålet, varefter man tätar genom uppvärmning och smältning av beröringsranden. Nu fylles röret med kvicksilver och efter det alla luftblåsor avlägsnats genom skakning och eventuellt upphettning, sätter man för fingret och vänder upp och ned på röret, varefter öppningen placeras vid botten av en skål med kvicksilver. När man nu avläser kvicksilverpelarens höjd, finner man den lika med barometerståndet. Man får väl i allmänhet ej helt vakuum, men den instängda gasens tryck är dock högst någon tiondels mm. Trådarna från en gnistinduktor kopplas nu till, och man får alltefter storleken av den erhållna förtunningen fram de kända ljus-

företeelserna. Genom att medelst en pipett föra in små luftblåsor genom den öppna i kvicksilvret nedsänkta ändan kan man ändra fenomenet successivt. Vid varje sådant betraktande kan man tydligen mycket hastigt bestämma den instängda gasens tryck. Enklast sker detta genom att markera kvicksilverytans första ställning medelst nedre kanten av en liten mässingsring, som med friktion glider kring röret. Vill man ha ett rör med definitiv förtunning, kan man genom kraftig uppvärmning ett stycke under den nedre platinatråden få röret att falla ihop och genom att försiktigt vrida och draga upp den övre delen få den för sig själv.

Det är vid försöket önskvärt, att kvicksilvret ej alltför länge står i beröring med platinatråden, ty det kvicksilver, som därvid amalgamerar sig med platinan, destillerar vid försöket över till glasväggen och hindrar i någon mån iakttagelsen närmast elektroden.

Högre Latinläroverket i Göteborg d. $^{16}/_{4}$ 1925.

Vågrörelseapparat för transversella och longitudinella vågor.

Av C. U. LING.

Denna apparat, som först beskrevs år 1920[1] och sedan prövats vid flera läroverk och befunnits fylla ett behov, tillhör den typ av vågmaskiner, där en verklig vågrörelse framkallas och automatiskt fortplantas.

Den har framgått som en utveckling av det bekanta försöket med två kopplade pendlar, beskrivet bl. a. hos Grimsehl. Inom parentes sagt får man en vacker och tydlig framställning av rörelseenergins fortplantning i en partikelserie, om man utför nämnda försök med flera pendlar, 8 à 10 stycken eller mer. Någon egentlig våg blir det ej. Varje pendel gör några svängningar och kommer i ro, och nästa pendel fortsätter. Rörelsen reflekteras och går ytterst sakta länge och väl fram och åter i pendelserien.

Apparaten är sammansatt av 17 stycken fast upphängda pendlar. De utgöras av blykulor, fästade i snören på 7 cm:s avstånd från varandra. Dessa 17 pendlar äro fast förenade med 14 cm långa kopplingssnören, som hållas spända av mindre blykulor. Sålunda har erhållits ett mjukt verkande elastiskt medium. Den 0:e pendeln, »tungpendeln» (märkt A), som är avsevärt tyngre än de övriga och håller rörelsen i gång, är förenad med de övriga genom ett avtagbart kopplingssnöre. Den 18:e pendeln (märkt B_1) saknar blykula och kan avlyftas. Vid reflexion mot tätare medium — sista pendeln fast — hålles denna spänd med en fjädrande ståltråd; vid reflexion mot tunnare medium – sista pendeln

[1] I Meddelande om Ny Materiell, häft. 3. Är omtalad i Handledning exp. fysikundervisning av Lemoine och i Fysik, del IV av Ohlon.

lös — avlyftes den eller ock avbrytes kopplingen med den 17:e, och denna blir den sista. En andra tungpendel (märkt *B*) kan placeras efter den 17:e eller före tungpendeln *A*. Hur de skola placeras, framgår av bilderna. Ävenledes synes att flera olika pendellängder och kopplingssnören för tungpendlarna äro behövliga. De hållas lätt isär genom olika beteckningar och färger.

Medelst flyttbara löpare, ett på varje vertikalstöd, kunna tungpendlarnas längd förändras och därmed deras svängningstal; därmed förändras vågornas längd. På löparen sitter ett mässingsbleck i form av en cirkelkvadrant och det är försett med en springa, som kan ställas parallellt med eller vinkelrätt mot pendelserien. Stativet är omkring 1,6 m långt och 70 cm högt och helt av metall.

Medelst apparaten kunna framkallas fortskridande och stående vågor, transversella och longitudinella. Två vågsystem, som fortskrida antingen mot varandra eller i samma riktning kunna bringas att interferera. Efter en obetydlig komplettering av apparaten kan man även demonstrera svävningar.

Försök 1. Fortskridande vågrörelse (se fig. 1).

a) transversell:

Armen inställes på t. ex. 21 cm (avläsningen sker på en skala på stödet). Springan ställes parallellt med pendel-

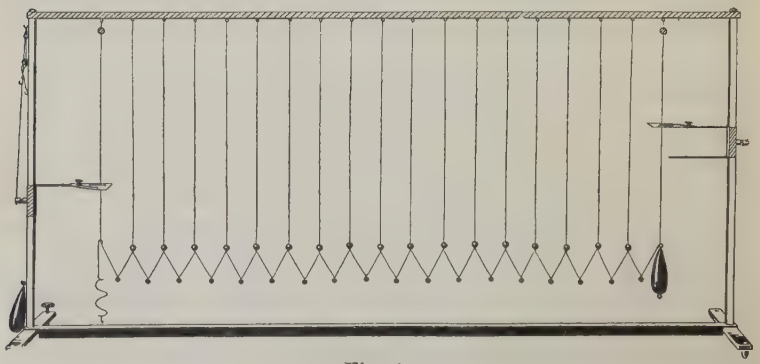


Fig. 1.

serien. Tungpendeln föres ur jämviktsläget och försättes i tvärsvängningar. De första vågorna bli ej fullt utbildade, men efter några svängningar är vågen utbildad och löper till seriens slut. En vågfront följes med handen införd i densamma och fortplantningshastigheten bestämmes (c:a 2 m/sek.). Tungpendelns eller en godtycklig pendels svängningstal bestämmes. Våglängden mätes, vilket sker noggrannare efter vågens reflexion (se nedan!). Sambandet mellan h, n och λ sökes. Pendellängden förminskas med 4 à 5 cm i stöten och försöket förnyas. Mellan varje försök bringas pendelsystemet i vila medelst en linjal. Svängningstalet blir alltså större; det iakttages, att våglängden minskas. Produkten $n \cdot \lambda$ är dock ej konstant; hastigheten minskas med växande svängningstal.

b) longitudinell:

Springan ställes vinkelrätt mot pendelserien. Tungpendeln sättes i längssvängningar — amplituden göres ej för stor och sidosvängningar undvikas. För övrigt ungefär lika med föregående.

De reflekterade vågorna, som snart störa bilden, dämpas betydligt, om de sista pendlarna få stöta mot ett mjukt tungt tyg, som lämpligen hänges tvärs över den horisontella stången.

Försök 2. Interferens av varandra mötande vågsystem.

a) transversella vågor:

Den första tungpendeln (A) upphänges som förut, den andra tungpendeln (B) efter den sista pendeln. Armarna ställas på 22 cm. Bägge tungpendlarna föras ur jämviktsläget med lika stora amplituder åt samma håll och släppas samtidigt — de få samma fas. Vågorna mötas vid den mellersta pendeln, som svänger ut med dubbel amplitud. När vågsystemen nå fram, var till sin ända, befinner sig systemet i stående vågrörelse. Föras tungpendlarna åt var sitt håll — de få motsatt fas — blir mittpendelns amplitud noll, och som förut inställer sig systemet i stående vågrörelse.

Före försöket bör kontrolleras att tungpendlarnas svängningstal överensstämma. Vid detta försök ställas armarna på 21 cm.

b) longitudinella vågor:

Bägge springorna inställas för längssvängningar. För övrigt som föregående. När tungpendlarna föras åt samma sida ställas armarna lämpligen på 27 cm, när de föras åt motsatt sida på 24 cm.

Försök 3. Stående vågrörelse, uppkommen genom reflexion (se fig. 1).

a) transversell vågrörelse:

Springan inställes parallellt med pendelserien. Angående armens inställning se tab. i slutet av denna artikel. Tungpendeln sättes i tvärsvängningar; dess rörelse understödjes i början, desto mera ju längre pendeln är. Den sista pendeln antingen fastlåses (refl. mot tätare medium) eller lämnas fri (refl. mot tunnare medium). Efter hand som vågorna återvända mot utgångspunkten inställer sig pendelsystemet i stående vågrörelse. Noder uppkomma på ställen, som för ett givet antal noder (se tab.) lätt kunna matematiskt bestämmas och vilka lämpligen i förväg utmärkas med pappersremsor e. dyl., som läggas ovanpå stativet. Ställes armen exempelvis på 21 cm (sista pendeln fast), blir efter endast några sekunder pendlarna n:r 2, 6, 10, 14 stillastående.

b) longitudinell vågrörelse:

Springan ställes vinkelrätt mot pendelserien. Tungpendeln sättes i längssvängningar. För övrigt som föregående. I detta försök demonstreras genom successiva förändringar av tungpendelns längd, rörelsetillståndet i den slutna och öppna pipan från grundtonen upp till 8:e övertonen. I tabellen nedan äro införda armens lägen för olika toner; tonens renhet är i hög grad beroende av armens noggranna inställning, varför tabellen bör kontrolleras och korrigeras.

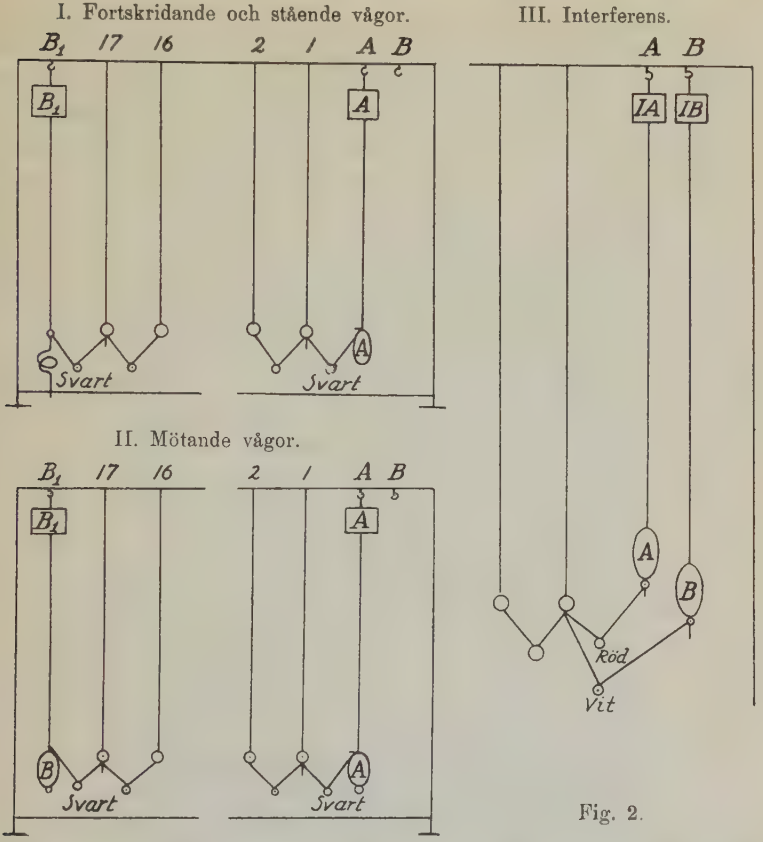


Fig. 2.

Endast en halv cm gör ganska mycket. Några ord böra nämnas om denna korrigering. Om observatören har tungpendeln på höger hand och noderna inträffa något till höger om de riktiga lägena (dessa böra utmärkas i förväg), skall armen sänkas något — $^1/_2$ till 1 cm —; inträffa de till vänster om de riktiga lägena eller äro flera än tabellen angiver, skall armen höjas. Särskilt ren blir 4:e övertonen i den slutna pipan; noder inträffa precis på (ej mellan) pendlarna n:r 2, 6, 10, 14. Den 8:e övertonen i den öppna pipan har noder på varannan pendel 1, 3, 5 o. s. v. Ju högre tonen är, desto hastigare uppkommer den. Ampli-

tuden göres mindre, ju högre tonen är. Vid de högre övertonerna behöver tungpendelns rörelse ej understödjas, däremot vid de lägre. Anmärkas bör kanske, att »pipan» naturligtvis ger dessa toner var för sig och att apparaten ej återger det komplicerade rörelsetillstånd, som uppkommer, när pipan ger grundtonen samtidigt med en eller flera övertoner. Förloppet i detalj vid själva reflexionen låter sig ej tydligt iakttaga — möjligen vid refl. mot tätare medium, om man med handen tilldelar t. ex. den 3:e eller 4:e pendelkulan, från slutet räknat, en stöt och iakttager att den refl. stöten är riktad åt motsatt håll. Varje partikel behöver nämligen mera än en svängning för att fullständigt överföra sin rörelseenergi på nästa partikel. Detta förhållande inverkar ej på åskådligheten av försöket i övrigt.

Försök 4. Interferens av två vågsystem, som fortskrida i samma riktning (fig. 2, III och fig. 3).

Kopplingen framgår av figurerna. Springan inställes för tvärsvängningar och armen ställes lämpligen på 15 cm. Det bör tillses, att tungpendlarnas kopplingskulor vid rörelsen ej kollidera, och att deras kopplingssnören äro likformigt spända, vilket lätt åstadkommes genom kopplingskulornas förskjutning.

a) Fasskillnaden noll eller en hel våglängd.

Bägge tungpendlarna få var för sig utsända ett vågsystem med samma amplitud — ej för stor. Amplitudens storlek och våglängden iakttagas. Mellan varje försök och efter försöken bringas pendelsystemet i ro. Därefter föras bägge tungpendlarna ur jämviktsläget åt samma håll och med samma amplitud som förut och släppas samtidigt. En fortskridande våg uppkommer med samma våglängd och ungefär dubbelt så stor amplitud, som de integrerande vågorna.

b) Fasskillnaden en halv våglängd.

Tungpendlarna föras ur jämviktsläget med lika amplituder åt motsatta sidor och släppas samtidigt. Pendelsystemet förblir i vila. De bägge vågsystem, som framgå i partikelserien, utsläcka varandra. Fattar man tag i den ena

tungpendeln, framträder den andra vågen. Släpper man den sedan igen i det rätta ögonblicket, d. v. s. när den andra tungpendelns amplitud är lika stor men riktad åt motsatt håll, utsläckes den gående vågen av den nya, efter hand som den upphinnes av densamma. Man måste vara påpasslig, om försöket skall lyckas och ej dröja tills de

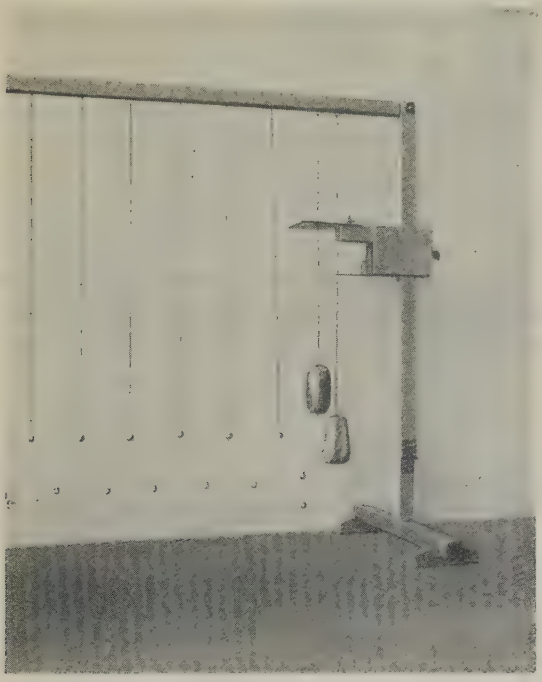


Fig. 3.

reflekterade vågorna störa vågbilden. Om dämpning av dem se ovan! För ett tillfredsställande resultat är det givetvis nödvändigt, att tungpendlarnas svängningstider överensstämma; en liten korrigering är kanske av nöden.

Försök 5. Svävningar.

Om man kopplar tungpendlarna som i försök 4 och tillverkar en extra löpare, så att B:s pendellängd kan för-

minskas, visas tydligt svävningarnas natur. Tungpendlarna föras ur jämviktsläget åt samma håll med samma amplitud och släppas samtidigt. Mellan varje tillfälle, när tungpendlarna ha samma fas ser man 1 svävning, d. v. s. i serien framskrider en kraftig våg följd av en helt liten våg. Sambandet mellan svävningarnas antal och svängningstalen framstår enkelt och tydligt.

Apparaten tillverkas och säljes av P. A. Norstedt & Söner och kostar för närvarande 90 kr.

Tabell upptagande armens läge vid stående vågrörelse.

	Antal noder	Transversell Armens läge om sista pendeln är		Longitudinell Armens läge om sista pendeln är	
		fast	fri	fast	fri
Grundtonen	1 nod	4 cm	6 cm	5 cm	9 cm
1:a övertonen	2 noder	7 »	9 »	10 »	12 »
2:a »	3 »	10,5 »	13,5 »	15 »	17 »
3:e »	4 »	17 »	18,5 »	20 »	23 »
4:e »	5 »	21 »	22,5 »	26 »	27 »
5:e »	6 »	26 »	27 »	30 »	32 »
6:e »	7 »	30,5 »	31 »	34 »	35 »
7:e »	8 »	33,5 »	33,5 »	37 »	38 »
8:e »	9 »	35 »	36 »	40 »	40 »

En apparat för bestämning av *g*.

Av FOLKE GUNNESON.

För bestämning av tyngdkraftens acceleration kan man använda sig av två metoder. Dels kan fallrörelsen på konstlad väg göras långsammare och dels kan man direkt studera det fria fallet. Apparater, som grunda sig på den första metoden, äro Galileis fallränna och Atwoods fallapparat. För undervisningsändamål lämpar sig dock bäst de apparater, med vilka falltiden för en fritt fallande kropp uppmätes. En apparat av det senare slaget finnes beskriven i Lehrbuch der Physik av E. Grimsehl. En stämgaffel, vars svängningstid är bekant, bringas att svänga. Under fallet ritar ett å stämgaffeln anbragt stift en våglinje å den sotade ytan av fallkroppen, som utgöres av en glasplatta. Denna styres under fallet av två ledskenor. Emellertid är här friktionen mellan glasplattan och skenorna svår att undvika. Många andra typer av fallapparater finnas, men i regeln äro dessa alltför invecklade för att kunna användas vid undervisningen å skolstadiet.

I det följande lämnas en beskrivning av en apparat, som medgiver en direkt uppmätning av falltiden för en absolut fritt fallande kropp. Apparaten kan även användas för en verifikation av fallagen.

Fig. 1 visar en schematisk teckning av apparatanordningen. S är en spole med järnkärna. Genom spolen skickas en ström från ackumulatorn E. I strömkretsen är inkopplad en strömbrytare B_1. Denna består av två från varandra isolerade metallstänger A_1 och A_2. Hävarmen H är vridbar kring A_2 och nedtill försedd med en tyngd På grund härav kan H hållas tryckt mot A_1. Parallellt med B_1 går en led-

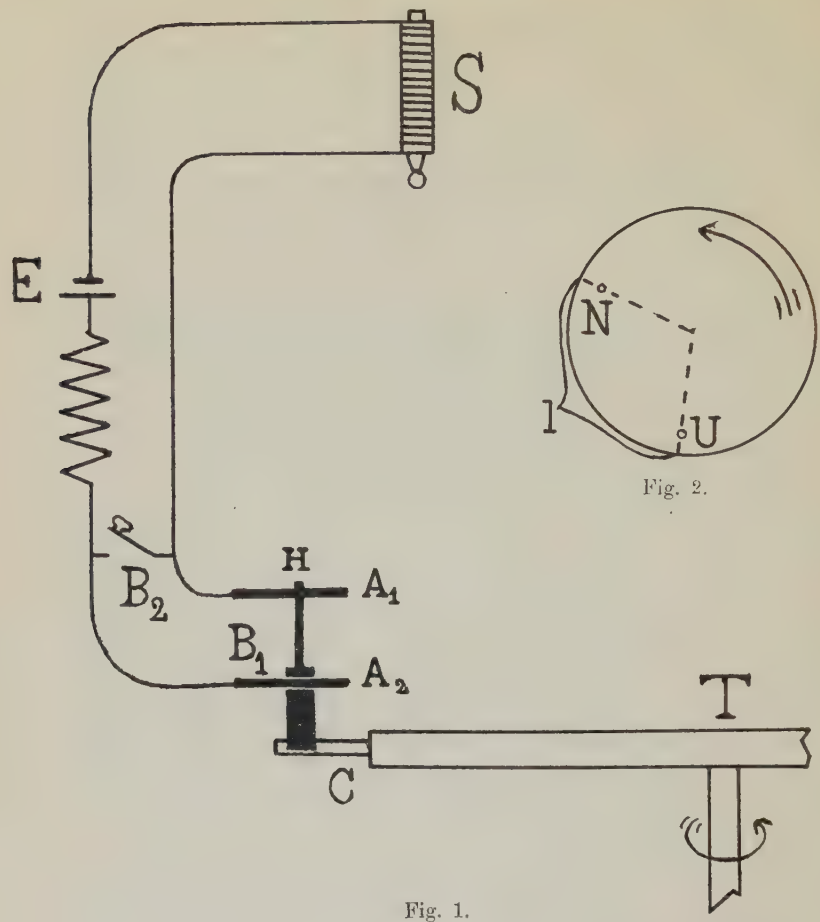


Fig. 1.

Fig. 2.

ning med strömbrytaren B_2. T är en cirkelrund träskiva, vars översida är betäckt med ett 3 mm tjockt lager hektografmassa. Träskivan är placerad å en grammofon, vars urverk driver skivan runt. I kanten av skivan sitter en stång C. Då C passerar B_1, slås hävarmen H åt sidan. Är B_2 sluten, åstadkommes intet strömavbrott. Är B_2 öppen kommer strömmen genom spolen S att brytas.

Bestämningen tillgår nu sålunda. B_2 är öppen. Strömmen

går alltså endast genom B_1. En järnkula fastsättes vid järnkärnan. Träskivan föres sakta runt och stannas, då C nätt och jämnt brutit kontakten vid B_1. Kulan faller och fastnar eller gör ett märke (U i fig. 2) i hektografmassan. Härigenom får man veta, över vilken punkt av skivan, som kulan befinner sig vid fallets början. Sedan slutes B_2, och kulan fastsättes på nytt vid järnkärnan. T bringas att rotera. Då konstant rotationshastighet erhållits, brytes B_2. När C därefter bryter kontakten vid B_1, faller kulan. Vid nedslaget fastnar denna eller gör ett märke i hektografmassan. Rotationshastigheten är så avpassad, att skivan under falltiden endast tillryggalägger en del av ett varv. Med kännedom om rotationsriktningen och efter uppmätning av varvhastighet och avståndet (l) mellan märkena, beräknas falltiden.

Tabellen å nästa sida visar värden å g, direkt uträknade ur formeln $v = \frac{g}{2} \cdot t^2$. Som fallkroppar användas 5 kulor, vardera med 8 mm:s diameter. Träskivans omkrets är 85,3 cm.

Alla dessa värden å g äro genomgående för låga, vilket beror på, att den uppmätta falltiden är för stor. Orsakerna härtill äro två. För den magnetiska utlösningen behöves en viss tid, vilken är konstant för alla fallhöjder, om strömstyrkan är densamma. Även luftmotståndet åstadkommer en försening, som är mindre, ju lägre fallhöjden är; emellertid torde vid ifrågavarande bestämningar den största felkällan vara tidsförlusten vid den magnetiska utlösningen. Denna tidsförlust gör sig starkast gällande vid den lägsta fallhöjden. Härav förklaras också det låga värdet å g, som därvid erhållits.

Den tid, som behöves för fallets utlösning, kan beräknas ur bestämningar vid två fallhöjder. Såsom värde å denna tid erhölls 0,008 sek. Minskas de observerade falltiderna härmed, erhållas de värden å g, som finnas i tabellens sista kolumn.

Denna korrektion torde ej behöva göras, om spolen med järnkärnan har tillräckligt liten självinduktion.

Tabell.

Fallhöjd dm	Kulan n:r	l cm	sek./varv	Falltid sek.	g m/sek.^{2}	g korr. m/sek.^{2}
	1	10,9		0,151	8,8	9,8
	2	10,9		0,151	8,8	9,8
1	3	10,9	1,180	0,151	8,8	9,8
	4	10,9		0,151	8,8	9,8
	5	10,9		0,151	8,8	9,8
	1	21,2		0,295	9,2	9,7
	2	21,2		0,295	9,2	9,7
4	3	21,2	1,186	0,295	9,2	9,7
	4	21,2		0,295	9,2	9,7
	5	21,2		0,295	9,2	9,7
	1	31,4		0,437	9,4	9,8
	2	31 5		0,438	9,4	9,7
9	3	31,6	1,186	0,440	9,3	9,6
	4	31,5		0,438	9,4	9,7
	5	31,5		0,438	9,4	9,7
	1	41,8		0,580	9,5	9,7
	2	41,7		0,579	9,5	9,8
16	3	41,9	1,181	0,580	9,5	9,7
	4	41,6		0,578	9,6	9,8
	5	41,7		0,579	9,5	9,8

Såsom fallkroppar användas kullagerkulor, som upphettats till stark rödglödgning och därefter långsamt avkylts. Om kulorna användas utan denna behandling, bliva de lätt permanenta magneter och hänga kvar vid järnkärnan trots strömbrytningen.

Fallapparaten kan också användas för att visa proportionaliteten mellan fallhöjden och kvadraten på fallliden. För fallhöjderna 1, 4, 9 och 16 dm komma nämligen märkena, som bildas i hektografmassan vid nedslagen, att befinna sig på lika stora bågavstånd från varandra.

Då elektromagneten, den automatiska strömbrytaren och träskivan med hektografmassa äro lätta att tillverka, vill

jag här lämna några anvisningar angående förfärdigandet av dessa apparatdelar.

Elektromagneten kan tillverkas av en 2 mm tjock järntråd. Lindas direkt på densamma ett enda tätt lager 0,2 mm:s isolerad koppartråd, kan elektromagneten vid en strömstyrka av 0,5 ampère bära en järnkula av 8 mm:s diameter.

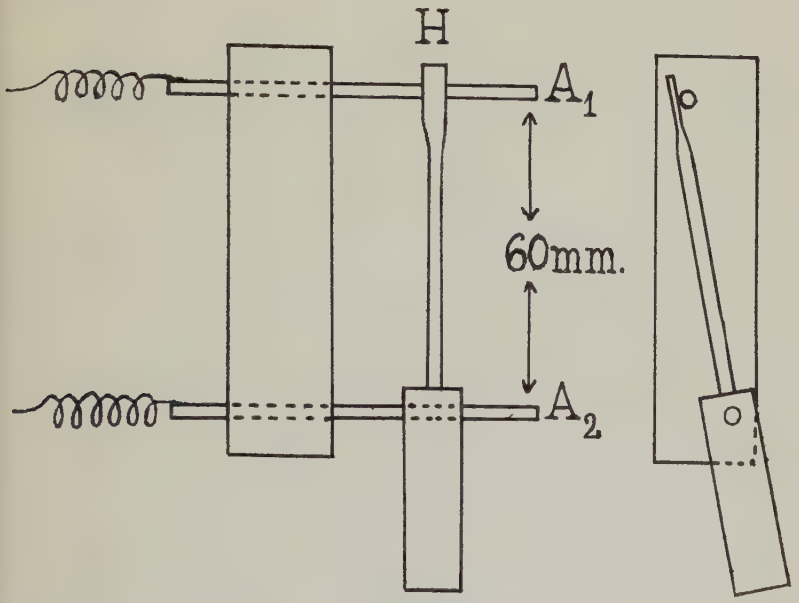


Fig. 3.

Strömbrytaren (fig. 3) består av en träkloss, genom vilken två hål borrats. Genom dessa gå två metalltrådar av 2 mm:s diameter. Vid den ena änden av trådarna äro tilledningar fastlödda. Hävarmen *H* består av en 2 mm tjock metalltråd, som fastlötts vid en mässingsstav. I denna är upptill borrat ett hål, genom vilket tråden A_2 går.

Träskivans omkrets bör helst vara 1 m för att därigenom underlätta beräkningen av falltiden. Om dessutom en mm-graderad skala (t. ex. mm-papper) är anbragt i kanten av skivan, så underlättas avläsningarna. På grammofonens

axel, vilken sticker upp genom ett hål i träskivans centrum, placeras en vridbar hylsa med en visare, som räcker fram till skalan. Vid avläsningarna vrides visaren ena gången över *U* och därefter över *N* (fig. 2).

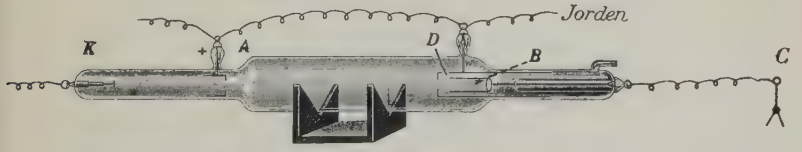
Fallkropparna böra helst bestå av rent järn. Men då kulor av rent järn ej torde finnas i handeln, kan man lämpligen använda kullagerkulor, vilka behandlats på förut omtalat sätt.

Stockholms högre folkskola för teknisk utbildning d. $^{7}/_{11}$ 1925.

Det Perrinska röret.

Av T. E. AURÉN.

Genom experiment, som utfördes av Perrin 1895, bevisades för första gången på fullt bindande sätt, att katodstrålarna medföra negativ laddning. Att upprepa det Perrinska experimentet vid skolförsök erbjuder ingen större svårighet, då numera särskilt för detta ändamål konstruerade rör finnas att tillgå.[1] Visserligen torde flertalet lärare nöja sig med att meddela, att elektronerna äro negativt laddade utan att därför lämna något experimentellt bevis, men med den oerhörda betydelse, som elektronerna ha för modern fysik och kemi synes det högeligen önskvärt, att eleverna själva måtte få tillfälle att övertyga sig om denna fundamentella egenskap hos elektronerna. Då det Perrinska röret torde vara föga använt vid fysikundervisningen vid våra skolor, tillåter jag mig att lämna en kort beskrivning av detsamma. Apparaten består, som figuren visar, av ett



glasrör, i vars ena ände finnes insmält dels en katod (*K*), dels en med en öppning försedd anod (*A*). I rörets andra ände är ett cylinderformat Faradays kärl (*B*) anbragt, som förbindes med ett elektroskop (*C*), vars hölje förbindes med jorden eller som skyddas med tillhjälp av metallskärmar, förbundna med jorden. Cylindern (*B*) skyddas likaledes genom en yttre cylinder (*D*), som sättes i förbindelse med

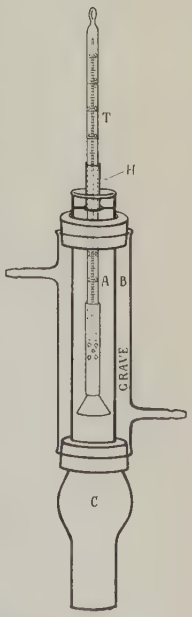
[1] Graves katalog n:r 8960.

jorden. Även anoden (*A*) förbindes med jorden. Med tillhjälp av ett induktorium eller en influensmaskin åstadkommas katodstrålar, av vilka ett smalt knippe tränger igenom öppningen i anoden. Detta strålknippe träffar det Faradayska kärlet, som därvid laddas negativt. Laddningens tecken konstateras på vanligt sätt genom att närma en gniden glas- eller lackstång till elektroskopet. För att visa att kärlet uppladdas, endast då det träffas av katodstrålar, kompletteras försöket med ett försök, vid vilket strålknippet med tillhjälp av en magnet devieras, så att det icke träffar det Faradayska kärlet utan i stället träffar kanten av skyddscylindern (*D*). Framkanten av denna cylinder är bestruken med fluorescerande färg, så att man kan se, i vilken punkt strålknippet träffar cylindern. Försöket är lätt att utföra och har den stora förtjänsten att vara en direkt reproduktion av ett klassiskt experiment. Det nu beskrivna röret synes mig äga stora företräden framför de apparater för samma ändamål men av annan konstruktion, som finnas tillgängliga i marknaden.

Uppvärmningsapparat för kalorimeterförsök.

Av T. E. AURÉN.

De brukliga apparaterna för uppvärmning av de prov av fasta kroppar (kopparnubb e. dyl.), vilkas specifika värme skall bestämmas, lämna i allmänhet åtskilligt övrigt att önska. Nedsläppningen av provet går understundom för långsamt. Delar av provet fastna i uppvärmningskärlet eller vatten från det bad, vari provet uppvärmes, följer med, då provet nedhälles i kalorimetern. För att förebygga fel i bestämningarna till följd av dessa och liknande olägenheter har en apparat konstruerats, av vilken figuren visar en avbildning. Apparaten utgöres av ett cylindriskt glasrör (*A*), nedtill försett med en sfärisk utvidgning (*C*). Omkring detta rör är medelst gummiproppar ett yttre rör (*B*) anbragt, vilket rör är försett med grenrör, så att vattenånga kan ledas genom detsamma. I det inre rörets övre del är en fjädrande metallhylsa (*H*) fästad och i denna är en termometer (*T*) placerad. Termometern är nedtill försedd med en trattliknande utvidgning, antingen bestående av en liten glastratt fäst medelst ett mässingsrör vid termometern eller av en trattliknande utvidgning under själva termometerkulan. Provet nedsläppes i det inre röret, där det hindras från att falla genom nyssnämnda trattformiga utvidgning, och övre ändan av röret tilltäppes med bomull. Sedan provet uppvärmts med tillhjälp av vatten-



ånga, som ledes genom det yttre röret, placeras kalorimetern under uppvärmningsapparaten. Termometern nedföres så att tratten kommer att befinna sig mitt i utvidgningen (*C*), varvid provet faller ner i kalorimetern. Apparaten tillverkas av firman Grave, Stockholm, och betingar ett pris av 17 kronor 50 öre.

En evakueringsanordning för giftgaser i kemiska laboratorier.

Av BROR GUSTAVER.

Alla kemilärare veta, vilket besvär elevlaborationer vålla vid arbeten med illaluktande eller giftiga gaser på grund av den trängsel, som uppstår vid de i de flesta laboratorier alltför fåtaliga dragskåpen, vari försöken utföras. Ofta brukar man därför anordna avdragsrör, som mynna i själva laborationsborden. Dessa evakueringsrör äro emellertid i de flesta fall ej möjliga att utnyttja utan särskilda anordningar för att leda giftgaserna ned i avdragsrören.

I kemiska laboratoriet vid det nyuppförda folkskoleseminariet i Karlstad har till var och en av de 8 arbetsplatserna — ävensom till lärosalsbordet — framdragits ett

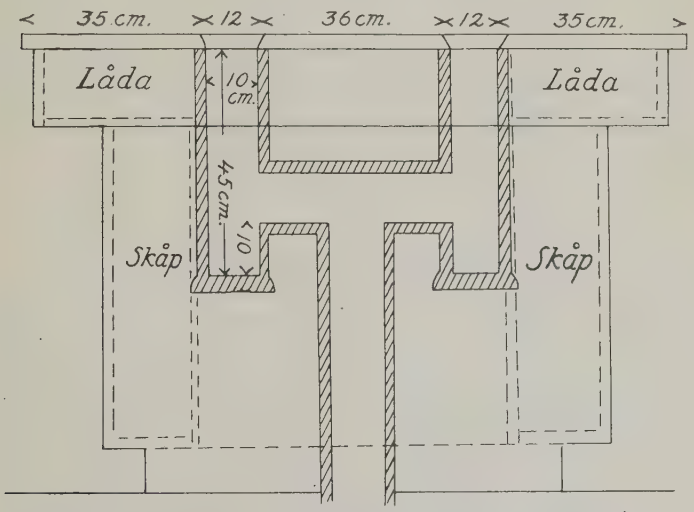


Fig. 1. Profil genom ett laborationsbord (två arbetsplatser).

evakueringsrör av lergods med 10 cm invändig diameter vid mynningen. Rören äro försedda med botten, för att eventuellt nedfallande fasta föremål icke skola gå förlorade (se fig. 1). Avdragsrören leda till en fläktkammare på vinden, där utsugningen sker med en fläkt, driven av en trefasmotor på 0,2 hkr (varvantal 550).

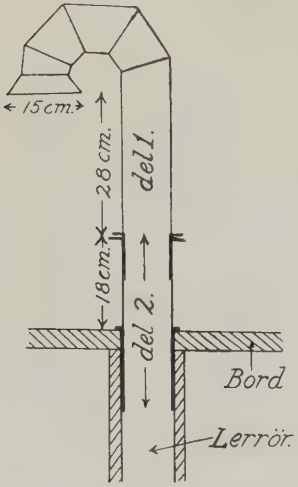


Fig. 2.

Till varje arbetsplats hör ett plåtrör i två delar, som utgör fortsättning på evakueringsröret i bordet. Rörens utseende framgår av fig. 2.

Vid arbeten med en degel eller en skål på en trefot användes endast del 1, medan båda delarna komma till användning, om man under avdraget placerar ett högre kärl, t. ex. en kolv.

Utsugningen är fullständigt effektiv. Vid prov med olika giftgaser och med alla draghål i laboratoriet öppna kunde i intet fall någon lukt märkas, inte ens alldeles intill kanten av plåtrörets mynning. Rören äro svartmålade med maskinglasyr, som är motståndskraftig mot värme, då de ofta upphettas starkt av avdragsgaserna.

Kemiska notiser.

Av G. STARCK.

X. Dissociation av natriumbikarbonat.

Dissociationen av kalciumkarbonat, det klassiska exemplet på en heterogen jämvikt, blir mätbar först vid höga temperaturer, och jämviktsläget uppnås mycket långsamt. Dess kvantitativa undersökning under en lektionstimme möter därför stora svårigheter. Då det emellertid måste anses synnerligen önskvärt, att även den teoretiska kemiens satser belysas och bekräftas av experiment för att bli levande, har förf. utfört motsvarande försök med natriumbikarbonat, som dissocieras vid lätt tillgängliga temperaturer, vilka därjämte lätt kunna hållas konstanta, enligt

$$2\,NaHCO_3 \rightleftarrows Na_2CO_3 + CO_2 + H_2O\,.$$

Denna jämvikt är undersökt av *Caven* och *Sand*, ur vilkas resultat följande utdrag må anföras:

Totaltryck av $CO_2 + H_2O$ över $NaHCO_3$					
$t =$	50	70	90	100	110°
$p =$	30,0	120,4	414,3	731,1	1252,6 mm.

Önskar man demonstrera detta totaltryck, får man nog uppgiva fordran på att apparaten skall vara enkel; detta mål nås däremot, om man låter vattenångan kondenseras och visar jämviktstrycket av CO_2, som är hälften av det totala. Härigenom kan man ju också sägas göra den vinsten, att reaktionen blir mer jämförlig med kalciumkarbonatets dissociation.

I den första av nedan avbildade apparater mätes trycket med en sluten luftmanometer, i den andra med en öppen

kvicksilvermanometer. Den förra kan ge övning i räkning med gaslagarna, den senare är utan tvivel mer åskådlig.

Fig. 1 visar en liten glasbehållare (20 × 30 mm), fylld med en blandning av bikarbonat och vattenfri soda och förenad med ett $\frac{1}{2}$ m långt kapillärrör. I detta kapillärrör in-

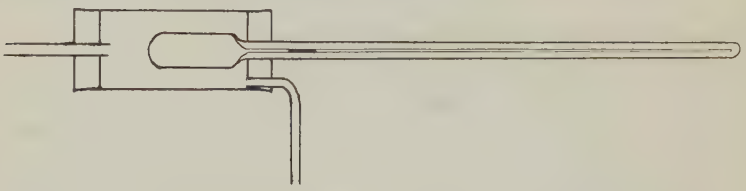


Fig. 1.

föres en kvicksilverpelare vid vanlig temperatur tämligen långt in, varpå kapillärröret igensmältes. Barometerståndet skall härvid antecknas och anteckningen härom, som bildar apparatens »konstant», bevaras. Röret är, som fig. visar, i horisontell ställning insatt i ett vidare mantelrör, genom vilket vattenånga kan ledas.

Vid ett försök gjordes följande avläsningar. Då röret tillsmältes, var barometerståndet 764,0 mm (0°). Luftpelarens längd före försöket, vid 21°, var 450 mm, vid kulans upphettning till 100° 254 mm. Således var det totala trycket i kulan $= \frac{450}{254} \times 764$ mm. Härifrån avgår luftens genom uppvärmning (vid praktiskt taget oförändrad volym) ökade tryck $= \frac{373}{294} \times 764$. De genom dissociationen bildade gasernas tryck var således $= \left(\frac{450}{254} - \frac{373}{294}\right) \times 764 = 384$ mm. Om man härifrån avdrager trycket av mättad vattenånga vid 21° = = 19 mm, blir kolsyrans jämviktstryck = 365 mm, vilket överraskande väl stämmer med tabellens värde för 100° = = 366 mm ($= \frac{1}{2} \times 731{,}1$).

Jämviktens inställning tager högst 5 minuter i anspråk.

Den andra apparaten (fig. 2) är i motsats till den första evakuerad. Kulan är fylld med bikarbonat och ka-

pillärt förenad med en öppen, 80 cm lång kvicksilvermanometer. Den är försedd med ett kort sidorör, utdraget i en spets. Manometern fylles med kvicksilver ända upp till kapillärröret, varpå kulan upphettas med en låga. Genom den öppna spetsen avgår då en ström av kolsyra och vattenånga, som tager luften med sig. Spetsen igensmältes, och apparaten är färdig att tagas i bruk. Manometern är lämpligen fastsatt vid en bräda med påklistrad skala av millimeterpapper. Den övre av de båda kranarna stänges, då apparaten förflyttas, för att förhindra kvicksilvrets skvalpande.

Fig. 2.

Vid bikarbonatets upphettning i en bägare med kokande vatten erhölls efter ungefär 15 minuter följande jämviktstryck: 390 mm. Om härifrån avdrages vattnets ångtryck vid rumstemperatur, 19 mm, blir koldioxidens jämviktstryck 371 mm (ber. 366).

Det är mycket illustrativt, att vid 100° kvicksilvret i manometern intager ungefär det läge, som fig. 2 visar, ehuru bikarbonatet vid fullständig sönderdelning skulle utveckla en kolsyremängd, som kan räknas i liter.

XI. Natriumkulans temperatur.

I en nyutkommen lärobok i oorganisk kemi förekommer uppgiften, att temperaturen av den på vatten simmande natriumkulan måste understiga 100°, vattnets kokpunkt. Då skälet förefaller för svagt och flera omständigheter tala för att temperaturen är högre, har jag försökt att direkt uppmäta kulans temperatur.

Natrium smälter vid $+97{,}9°$; om dess temperatur måste understiga 100°, skulle man kunna angiva denna till $99° \pm 1$. Redan denna trånga marginal gör det mycket osannolikt, att temperaturen uppåt begränsas av vattnets kokpunkt.

Den snabbhet, varmed kulan smälter, antyder, att värmetillförseln är mycket stor, och att temperaturen stiger betydligt över smältpunkten. Även den omständigheten, att den på papper fasthållna kulan tänder sig eller att vätet tänder sig, talar härför. Den kula av NaOH, som då erhålles, är smält och t. o. m. glödande. Detta beror nu givetvis på metallens och vätets förbränningsvärme.

De termokemiska data äro:

$$\begin{aligned} Na + H_2O + aq &= NaOH \cdot aq + {}^1/_2\, H_2 + 44\,100 \text{ gkal}^1 \\ 2\,Na + {}^1/_2\, O_2 &= Na_2O + 100\,000 \text{ »} \\ {}^1/_2\, H_2 + {}^1/_4\, O_2 &= {}^1/_2\, H_2O + 34\,000 \text{ »} \end{aligned}$$

Natriums atomvärme är 7 gkal och den värmemängd, som åtgår för dess uppvärmning från rumstemperatur till smältpunkten, sålunda ungefär 560 gkal. Även dessa siffror göra det troligt, att kulans temperatur är hög, ty det är väl knappast sannolikt, att en värmeutveckling av 34 000 gkal skulle gå så i det närmaste förlorad, även om man tar hänsyn till att kulan simmar omkring på vattnet.

Givetvis kan den fritt kringsimmande kulans temperatur endast med svårighet direkt bestämmas. Hålles kulan stilla medelst filtrerpapper, tänder den sig. Även i kolsyreatmosfär tänder den sig på filtrerpapper. Däremot lyckas det att få kulan att ligga stilla utan att tända sig, om natriumbiten lägges i en liten ögla av metalltråd, som befinner sig just i vattenytan. För ändamålet användes fin koppartråd, 0,5 mm, formad till en cirkelrund ögla av 10 mm diameter.

Temperaturen av kulan bestämdes med ett järn-konstantanelement, hoplött med silver, kalibrerat medelst vattenånga (av 100°) och stelnande tenn (231°,8). Härvid visade det sig tyvärr vara omöjligt att föra lödstället, ehuru det hade den minsta möjliga storlek, *in i* natriumkulan; kulans ythinna är för stark, och man fick nöja sig med att trycka termoelementet mot kulans yta. Dock voro de erhållna maximaltemperaturerna anmärkningsvärt konstanta. I en serie försök erhöllos följande värden: 210, 208, 222, 188,

[1] Varav 10 000 gkal utgöra hydroxidens lösningsvärme.

198, 198, 198°. Kulans yta har således en temperatur av i runt tal 200°. I det inre är väl temperaturen antagligen högre. Nu torde man anmärka, att försöksbetingelserna äro andra än vid den fritt simmande kulan, vars värmeförluster till omgivningen äro större. Det väsentliga är dock lika, nämligen att kulan icke brinner, och så mycket är säkert, att i ovanstående försök temperaturen ej begränsas av vattnets kokpunkt; troligtvis ej heller vid den fritt simmande kulan.

Fenomenet var väl till stor del ett Leidenfrostskt. Natriumkulan, vars spec. vikt är 0,97, borde normalt till 97 % vara nedsänkt i vattnet. I stället simmar den ovanpå vattnet, uppburen av vätgas och vattenånga. Riktigare kanske är att säga, att kulan hoppar på vatten, ehuru frekvensen är så stor och amplituden så liten, att man ej uppfattar stötarna. Vid kontakten med vattnet löses natriumhydroxiden, och kulan lyftes upp av omedelbart därefter bildad vätgas och vattenånga. På grund av bristande symmetri i dessa lyftkrafter får kulan en horisontell och roterande rörelse.

Den brinnande kulan har en mycket högre temperatur. Vid direkt prov smälte silverlödningen, och även galvanometern gav utslag, som antydde en temperatur betydligt över 1 000°.

Ett par ord om kristallografien i skolan.

Av KARL A. GRÖNWALL.

I septemberhäftet för 1924 av denna tidskrift har fil. d:r Nils Alsén givit en framställning av kristallografiens grunddrag, stödjande sig på vetenskapens nyaste och intressantaste metoder. Det råder ej det ringaste tvivel, att en matematiskt någorlunda välbegåvad gymnasist i R III eller R IV efter denna eleganta undervisningsplan med lätthet skulle kunna tillgodogöra sig grunderna av kristallografien och därmed tillägna sig ett kunskapsstoff av i hög grad formellt uppfostrande natur.

Men — vill man åt kristallografien förskaffa större utrymme, hjälper det ej att för densamma reservera ett fåtal timmar ytterligare, ty mera kan det ju ej bliva frågan om, eller medelst inventiösa metoder och rikt undervisningsmaterial försöka bättra på förhållandena. En genomgripande förändring kan säkerligen icke åvägabringas utan genom att gå till grunden i frågan, till universitetsundervisningen, och framför allt reformera *examina*.

Det är i själva verket icke allenast *kristallografien*, som det här är frågan om, och ännu mindre endast den geometriska kristallografien, utan det gäller, som också d:r Alsén med rätta framhåller, viktiga hjälpvetenskaper åt den moderna atomfysiken, vilken ju ganska säkert inom kort kommer att sätta sin prägel även på skolans undervisning och läroböcker i kemi och fysik.

Universitetsundervisningen, likaväl som den vetenskapliga forskningen, har för dessa gränsområden mellan äldre och mera omfattande ämnen icke så lätt att anvisa vederbörlig plats och begränsning, så att rättvisa hänsyn tagas och

vetenskapens allmänna framsteg i möjligaste mån främjas. Emellertid måste man beakta den historiska utvecklingen, vilken här som i så många fall antyder, hur man lättast kan finna uppgiftens lösning. Kristallografien, vilken ju började som en rent matematisk vetenskap, har till den senaste tiden varit nära anknuten till mineralogien och i det stora hela delat dennas öden. Mineralogien var ända till mitten av förra århundradet nära nog övervägande en hjälpvetenskap åt kemien, och när kemien genom den organiska kemiens uppblomstring fick ett nytt uppsving, skildes den oorganiska kemiens och mineralogiens vägar nog så bestämt, och mineralogien slog in på mineralfysik, närmast kristalloptik, samt fick senare genom den mikroskopiska petrografiens starka utveckling i slutet av förra århundradet en alldeles bestämd orientering mot geologien. Den fysikaliska kemien upptog sedan i hög grad de oorganiska kemisternas intresse, och när Max von Laue genom sin upptäckt av röntgenstrålarnas förhållande till kristalliserad substans uppdagade ett stort nytt landområde åt atomfysiken, visade kemisterna i allmänhet ringa kolonisationslust, medan fysiker och mineraloger i ädel tävlan skyndade att ta det nya landet i besittning och uppodla detsamma. Redan vi ha sett mycket av dess frukter.

Undervisningen i dessa gränsområden kommer ganska säkert att stanna hos mineralogien, och då senare års utveckling fört denna samman med geologien, blir det hos ämnesgruppen geologi och mineralogi. Emellertid har denna blivit mycket styvmoderligt behandlad först i skolan och sedermera vid universitetet. Ibland de ämnen, som ingå i de för filosofisk ämbetsexamen fastställda kombinationerna, saknas geologi och mineralogi, vadan ämneslärare vid läroverken i intet fall äro förpliktade att förete examensbetyg i detsamma, fastän delar av detsamma ingå i undervisningen i olika ämnen på olika stadier, nämligen i geografi, biologi och kemi. Naturligtvis måste detta betecknas som ett avgjort missförhållande, som bör avhjälpas, och frågan är, om det ej vore riktigast att fastslå betyg i geologi och

mineralogi som villkor för avläggande av filosofisk ämbetsexamen. Kanske vore det mera opportunt att fastställa särskilda kurser i de grenar av ämnesgruppen geologi och mineralogi, som skulle anses behövliga som komplettering för blivande lärare i de respektive ämnena geografi, biologi och kemi.

I varje fall är det på lärareutbildningens sida, som bristen oftast ligger. För de flesta av kemilärarna, vilka i allmänhet icke ha geologi och mineralogi med i sin examenskombination, är kristallografien en terra inkognita, och icke är det märkligt, om intresset för ett gränsområde, som de själva under sin studietid endast ägnat obetydlig uppmärksamhet, senare allt mer och mer försvinner.

Alltså — det är nödvändigt, att examensfordringarna i ämbetsexamen i kemi utökas så, att de omfatta så mycket av kristallografi (och mineralogi), som erfordras för att tillägna sig den nyare atomforskningens resultater.

Lund, Geologisk-Mineralogiska Institutionen.

Matematiken i realskolans högsta klasser.

Av **HJALMAR OLSON.**

C. L. Lohmander, *Sifferekvationer av första graden*, närmast för realskolor, flickskolor och kommunala mellanskolor. A. B. Magn. Bergvalls förlag, 1925. Del I, 100 sid. + facit. Kr. 3: 50. Del II, 37 sid. + facit och tabell. Kr. 2: —.

Alfred Uddholm, *Lärobok i matematik*, realklassens kurs med övningsexempel. P. A. Norstedt & Söners förlag, 1925. 112 sid. Kr. 3: 25.

Gustaf Lindborg, *En samling matematiska repetitionsproblem* för realskolans, kommunala mellanskolans och flickskolans högsta klass. A.-B. Magn. Bergvalls förlag, 1922. 27 sid. Häft. kr. 1: 50.

Man kan sannerligen ej säga, att det råder någon brist på matematisk skollitteratur, avsedd för de läroanstalters behov, som leda till realskolexamen. Ur denna synpunkt behöver ej en lärare kasta bort tid på att själv sätta ihop sina provräkningsuppgifter, då det finns en rik källa att ösa ur, tillfredsställande olika pedagogiska smakriktningar: typproblem, praktiska uppgifter, förståndsuppgifter, exempel att visa formell räknefärdighet o. s. v. Därmed vare ej sagt, att det ej av andra skäl kan vara nyttigt för läraren att åtminstone till viss grad själv »författa» sina uppgifter.

De två först stående av ovan angivna böcker äro de senaste i genren, den tredje ligger ett par, tre år tillbaka i tiden; varför den medtagits i detta sammanhang skall framgå av det följande.

Av Lohmanders *Sifferekvationer av första graden* omfattar den första delen algebrakursen i realskolans fjärde och femte klasser, d. v. s. första gradens ekvationer jämte de traditionella tillämpningarna, av vilka de »praktiska» dominera och då främst bland dessa »procenttal» (vinst och förlust, rabatt, ränta, växlar, aktier, obligationer). Bland tillämpningarna märkas vidare sådana av planimetrisk och stereometrisk art, där man kan reda sig utan kvadratrötter I samband med cirkelns beräkning nämnes något om räkning med närmevärden. I ett kapitel behandlas den grafiska metoden samt i en avslutande avdelning bokstavsräkningens grunder (dignitetsräkning och faktorsuppdelning). Den andra delen behandlar sjätte klassens algebrakurs: ekvationssystem och kvadratrötter med särskilt planimetriska och stereometriska tillämpningar.

Uddholms *Lärobok i matematik* omfattar blott avslutningsklassens matematikkurs men i stället denna fullständigt, såtillvida som den även upptager plan- och rymdgeometrien.

Båda böckerna innehålla uppgifter givna i realskolexamen, den förra från tiden 1907—1911, den senare från de fem sista åren.

I Lohmanders lärobok är på många ställen inlagd en heuristisk lärogång, avsedd, som förf. säger i förordet, som ledning för yngre, oerfarna lärare. Den kommer särskilt till användning vid ekvationslösningen, ehuru enligt anmälarens mening på ett sätt, mot vilket vissa invändningar kunna göras. För att inse att $7x+5x=12x$ erinras om att $7x$ betyder $7 \cdot x$ samt att hopläggning av $7 \cdot 2$ och $5 \cdot 2$ bör ge 12 gånger 2 (ex. 351). Annars inses väl saken direkt, om man säger 7 st. $x+5$ st. x. Vid läran om kvadratrötter händer det ju ej sällan, att en lärjunge vill förenkla t. ex. $7\sqrt{3}+5\sqrt{3}$ genom att bryta ut $\sqrt{3}$, men han överger omedelbart den metoden, om han uppmärksammas på att man kan säga 7 st. kvadratrötter ur 3 plus 5 st. kvadratrötter ur 3, som bör ge 12 st. kvadratrö ter ur 3 eller 12 $\sqrt{3}$. Oriktigt är väl att säga, att $3(x-1)$ *betyder*, att båda

termerna inom parentesen skola multipliceras med 3 (ex. 401). Det betyder produkten av storheterna 3 och $x-1$, en annan sak är, att produktens värde är detsamma som skillnaden mellan $3x$ och 3. Att så är fallet, är just vad som här skall läras. Förf. talar även något oegentligt på ett par ställen om att reducera ett uttryck »till en term» eller betrakta ett uttryck »som en enda faktor». Att säga att »utbrytning är division» är olämpligt, då operationen ej ändrar uttryckets värde, vilket i allmänhet division gör; visserligen ingår i operationens utförande divisioner men även en multiplikation, då just avsikten är erhållandet av ett produktuttryck. Det tycks hava varit förf:s avsikt att så fort som möjligt komma fram till »regler» för lösningen av ekvationer, som sedan mekaniskt skola användas i alla väder. Nog förefaller det annars för lärjungarnas förståndsträning mera givande att i de enklaste ekvationstyperna $x \pm a = b$, $ax = b$, $\frac{x}{a} = b$ och $\frac{a}{x} = b$ inlägga frågor, vilka då av lärjungarna omedelbart besvaras utan några regler. Om lärjungen i ekvationen $x+5=8$ ser frågan: »Vilket tal skall läggas till 5, för att summan skall bli 8?» ger han också genast svaret $x=3$ utan att använda förf:s konstlade lösning: $x+5=8$; $x+5-5=8-5$; $x=3$. Eller man jämföre den aritmetiska förståndsmetoden på ekvationen $5-x=2$, som utan vidare ger svaret $x=3$, med följande förf:s resonemang (ex. 296): »Antag, att du har ekvationen $5-x=2$. *a*) Om du minskar båda leden med 5, får du $-x=-5$. Du får sålunda *en minskning med x lika med en minskning med 3. b*) Om en minskning med x är detsamma som en minskning med 3, vad måste då x vara lika med?» Man blir ju ej glad, när en elev i ekvationen $\frac{x}{2} = \frac{2}{5}$ vill skaffa bort nämnarna, då han borde ha vants vid att låta förståndet direkt säga sig, att ett helt x är $\frac{4}{5}$, då ett halvt x är $\frac{2}{5}$.

Styrkan i räkning med regler och formler ligger i att dessa så att säga få arbeta i vårt ställe; i desamma ligger

ett en gång för alla genomfört tankearbete magasinerat, och vid deras tillämpande återstår blott ett mindre ansträngande mekaniskt arbete för att komma till resultat. Regler eller formler äro av värde i samma mån, som de kräva många tankeoperationer för verifiering (ex. Herons formel) eller hava en omfattande användning (ex. de aritmetiska räknereglerna). En formels värde är således relativ; den som är nyttig att känna till för ingenjören eller för bankmannen, behöver inte alls passa för lärjungarna i våra realskolor, mellanskolor etc. Men förvärvandet av formeln (eller regeln) sker eller bör ske på olika vägar för olika personer. Yrkesmannen *frågar efter* formeln, som han har behov av. För våra lärjungar bör den under undervisningens gång så småningom tränga sig fram. Ofta blir det då också onödigt att någonsin kläda resultatet i någon medveten regel eller formel. Då det t. ex. gäller reducering av termer, komma lärjungarna rätt snart underfund med metoden, men nog är det väl ändå synd, att som sker i Lohmanders bok uttala eller låta lärjungarna uttala någon regel härför: »Termer med lika tecken reduceras medelst addition. Termer med olika tecken reduceras medelst subtraktion; resultatet får den största termens tecken.» Och en verklig styggelse ser anm. i att på detta stadium uppställa regeln, att digniteter med lika stora baser multipliceras »genom att addera exponenterna», liksom andra regler för dignitetsräkning. Av dylika regler saknar man varje behov, så länge exponenterna utgöras av siffror. Fördelaktigast är att alldeles undvika bokstavsexponenter naturligtvis i realskolan men även i gymnasiet, tills läran om potenser ligger före. Hava då lärjungarna i flera år räknat med digniteter utan regler, »ramla» dignitetlagarna nu ur dem som ett naturligt resultat av undervisningen.

Om det således i Lohmanders bok enligt anm:s mening alltför mycket har skattats åt inlärandet av regler, bör som en bokens stora förtjänst framhållas, hur den är så gott som alldeles ren från formler. Av dylika hava endast meddelats de allra nödvändigaste av planimetrisk och stereo-

metrisk art. Så t. ex. klargöres, att en kons mantel kan utbredas till en cirkelsektor, vars båge = basytans omkrets och radie = konens sida. Här sätter förf. punkt angående denna sak, och man slipper se den med skäl onödiga formeln: manteln $= \pi rs$.

Någon brist på formler är det däremot ej i Uddholms lärobok, vilken för övrigt förefaller alltför vidlyftig och lärd för realskolan. Ej mindre än sjutton, säger sjutton, formler få lärjungarna till livs på den kurs i handelsmatematik, boken innehåller. Några exempel:

$$I = \frac{100F}{100+v}; \quad N = \frac{100-r}{100} \cdot B; \quad e = \frac{100p}{100-pt}$$

$$(100+v)\,I = (100-r)\,B \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$N = S \cdot \frac{100-pt}{100} \quad \text{(diskontformeln)}$$

$$F = \frac{k}{100} \cdot N + \frac{N \cdot n \cdot t}{100 \cdot 360} \quad \text{o. s. v.,}$$

där bokstäverna betyda sådana saker som inköps- och försäljningssumma, nuvärde och slutsumma, brutto- och nettopris, effektiv räntefot, obligations försäljningspris etc. Det kan väl ändå ej vara realskolans mål i matematik, att lärjungarna skola inlära dylika formler för att använda på »praktiska» affärsuppgifter. Och om det ej är författarens mening att de skola inläras, varför stå de då där i boken?

Eller det kanske är så att säga i ren förtvivlan på grund av vunnen erfarenhet som förf. meddelat formlerna i akt och mening att de skola inläras (åtminstone av de »obegåvade»). Vårterminen 1919 gavs i realskolexamen följande uppgift: »Vilket pris måste åsättas en vara, som i inköp kostat 350 kr., för att den skall kunna säljas med 10 % vinst, oaktat säljaren lämnar $16\frac{2}{3}$ % rabatt?» Det blir ju en verkligt lätt uppgift enligt formeln (1) ovan: $v=10$, $I=350$, $r=16\frac{2}{3}$, $B=x$, och det matematiska arbetet inskränkes till lösandet av ekvationen $110 \cdot 350 = 83\frac{1}{3} \cdot x$. Huruvida Skolöverstyrelsen avsett, att uppgiften i fråga skall vara att räkna

till det svåra eller lätta slaget, är ej lätt att säga; att Överstyrelsen dock ej menat, att den som ovan skulle lösas med hjälp av formel, torde väl vara visst. Tänker man på den förståndsmognad, som är erforderlig för att utan formelapparat kunna tränga in i uppgiften, är den enligt anm:s mening en uppgift snarare svår än lätt för realskoleabiturienter. Och om många, alldeles för många av de uppgifter, som meddelas i realskolexamen, kan med skäl sägas, att de ej äro passande för det åldersstadium, för vilket de äro givna. Detta ej med avseende på de matematiska svårigheterna, de erbjuda, utan med hänsyn till den allmänna förståndsutveckling, de kräva, för att kunna lösas utan att behöva undergå behandling i en formelmaskin. Resultaten av skrivningarna i realskolexamen bära vittne härom, såsom framgår av följande översikt. I denna äro efter skolkommissionens statistiska utredning angivna procenttalen underkända i de olika skrivämnena för åren 1912—1917. Resultaten av reproduktionsproven i tyska och engelska äro ej medtagna; de ge emellertid avsevärt lägre procentsiffror än översättningsproven.

Vårterm.	Svenska	Räkning	Tysk översättn.	Engelsk översättn.
1912	2,8	*35,2*	22,1	11,6
1913	3,1	*45,2*	38,4	12,8
1914	2,2	*21,0*	8,6	10,6
1915	4,7	*28,8*	21,2	12,5
1916	5,5	*44,9*	8,5	12,5
1917	3,9	*43,5*	17,3	6,1
Medel-%	3,7	*36,4*	19,4	11,0

Även översättningsprovet i tyska visar en hög procentsiffra, dock blott något mer än halva procenttalet för matematik. Tyskan är emellertid ett svårt ämne, men om kunskapen i detta ämne är nödvändig för den allmänbildning, realskolexamen avser att vitsorda, är ju intet att göra åt den saken. Kan man nu säga detsamma om matematiken? Det torde knappast vara fallet. Kommer vederbörande att

ej speciellt bli sysselsatt med handelstekniska operationer, torde han ytterst sällan eller aldrig bli ställd inför sådana situationer, som motsvaras av många av realskoleproblemen. Skulle han någon gång komma i en sådan situation, så bör han ofta *inte* taga den så som han av dessa problem blivit lärd. Vårterminen 1919: »På vilket belopp skall man utskriva en tre månaders växel, som genast diskonteras efter 6 % för att få 800 kr. för densamma?...» Det kan ju vara en nog så vanlig situation. Har vederbörande fått sitt matematiska sinne upptränat i skolan, gör han snabbt en överslagsräkning, att diskontot blir något mer än 12 kr. Sedan skriver han väl växeln på t. ex. 825 kr. eller något sådant och tar det nog ej så hårt, att han får något mer än 800 kr. för densamma. Många problem, s. k. typproblem, kunna även mycket svaga lärjungar läras att lösa med hjälp av schablonmässiga uppställningar, men utan sådana och tagna som isolerade uppgifter äro de i allmänhet att betrakta som rätt så svåra, ej passande för realskolestadiet och, man kan gott säga, utan mycket praktiskt värde. När emellertid fordringarna hållas så höga och konstlade i provräkningen i realskolexamen, är det ej att undra på, att läroböckerna i det avseendet måste följa efter.

De ändringar beträffande fordringarna och kurserna i matematik, som enligt anm:s mening borde vidtagas, närmast yttrande sig genom en så småningom skeende omläggning av räkneprovet, äro följande: Stark inskränkning av den tillämpade matematiken till att blott omfatta mycket enkla uppgifter. Mera tid kunde då ges åt den rena matematiken, åt övning i formell räknefärdighet och i utförande av algebraiska räkneoperationer. Den konstlade gränsen, t. o. m. ofullständiga andragradsekvationer bör hävas. Att lösa en andragradsekvation är ju ingenting svårt, i alla händelser betydligt enklare att lära en pojke än att inviga honom i obligationernas mysterium och av mera praktiskt värde. Genom att tillämpningarna som nyss sagts göras mycket enkla blir mera tid och tillfälle till övande av det

matematiska sinnet; härvid spelar huvudräkningen en mycket stor roll. Övning i överslagsräkning: att reda ut åt vilket håll ett sökt resultat är att söka, om ett erhållet resultat är rimligt o. dyl., är i synnerhet ägnat att träna den matematiska uppfattningen och göra lärjungarna betydligt mer beredda att klara livets växlar och obligationer än s. k. praktiska tillämpningsuppgifter.

Gustaf Lindborg, *En samling matematiska repetitionsproblem* är också liksom Uddholms bok avsedd för avslutningsklassen, mindre dock en exempelsamling än en sorts handledning vid repetitionen av de rent matematiska teorierna, försåvitt, som förf. säger, man kan tala om sådana i realskolan. Problemen äro hopsatta med tanke på att de lika mycket skola *studeras* som lösas och äro därför så sifferenkla som möjligt och matematiskt renodlade. Detta med full avsikt i känsla av vikten, att matematiken, såsom gripande mer och mer omkring sig på praktiska och naturvetenskapliga områden, just därför bör hållas så strängt renodlad och pedagogiskt självständig som möjligt. De olika kapitlen behandla ekvationer med en obekant, ekvationssystem, planimetri, stereometri och euklideiska problem. Det lilla häftet avslutas med »några enkla geografiska och astronomiska repetitionsfrågor i rymden». Som exempel på problemens tankeväckande innehåll citeras några:

22. Vilket är mest: $x+13$ eller $43-x$?

27. Om man upphöjer $x-7$ till kvadrat, fås ju som bekant $(x-7)^2=x^2-14x+49$. Är det alltså osant, att $(x-7)^2$ blir $x^2-16x+51$?

117. Skära ett par diagonaler i en kub varandra under räta vinklar?

189. Jordinvånarna se ju endast ena sidan av månen. Vilken sida av månen skulle en solinvånare komma i tillfälle att få se?

Nu vill ej anm. hava sagt, att denna exempelsamling skulle vara idealet i motsats till de två i det föregående avhandlade böckerna. Detta skulle väl i så fall ligga någon-

stans emellan. Praktiska uppgifter kunna också göras nog så tankeväckande, det praktiska inslaget bör blott ej få dominera, låtande matematiken blott bestå i mekaniska räkneoperationer. Med den lilla problemsamlingen har förf. väl ej heller tänkt ge en ersättning för gängse exempelsamlingar; därför är den för liten och bär rätt mycket tillfällighetens prägel. Även är den enligt anm:s mening på sina ställen väl svår. Som en sund reaktion mot de i det föregående påtalade tendenserna beträffande fordringarna i matematik i den allmänt medborgerliga examen och därav följande läggningen hos lärobokslitteraturen på området, är den synnerligen beaktansvärd.

Den organiska kemiens ställning på gymnasiet.

Av TORSTEN PEHRSON.

Tom Moll. *Lärobok i kemi för realgymnasiet. II. Organisk kemi.* Tredje uppl., omarbetad av G. Starck. P. A. Norstedt & Söners förlag, 1925. 93 sid. Häft. kr. 1: 45.

Det kan ej förnekas, att den organiska kemien på kursplanen kommit att intaga en ställning, som ej motsvaras av ämnets verkliga betydelse. Kursen »bör endast omfatta ett mindre antal ämnesgrupper och föreningar, valda med hänsyn till deras betydelse särskilt i tekniskt och biologiskt avseende». I fortsättningen synas också de metodiska anvisningarna i kursplanen närmast oroa sig för att ämnet skall komma att spela en alltför framträdande roll.

Orsakerna härtill synas snarast vara historiska än pedagogiska och praktiska. Naturvetenskaperna i skolan lida ju mer än andra ämnen av kampen mellan de historiska synpunkterna å den ena sidan och strävan att hålla ämnet à jour med den moderna naturvetenskapens och teknikens framsteg å den andra, vilket för ämnets representant visar sig i svårigheten att förlika det stoff, som av ålder ansetts böra meddelas på gymnasiet, med det nya, som i våra dagar bokstavligen stormar in över honom. Biologien har haft att utkämpa denna strid mellan det historiska kravet på växtkännedom och den nya tidens fordringar på plats för fysiologi och andra kanske mer »biologiska» riktningar. Inom kemien har på detta sätt den organiska kemien under det senaste halvseklet tillvunnit sig en betydelse, som gör, att den mer måste beaktas även i skolan.

Karakteristiskt är det ringa utrymme, som i läroböckerna i kemi för gymnasiet ägnas däråt. I Tom Molls ursprungliga i mångt och mycket så förträffliga lärobok omfattar kursen i organisk kemi endast ett litet häfte om c:a 30 sidor, vartill komma de sidor, som behandla torrdestillation och förbränning, och vilka av outgrundlig anledning räknas till det »oorganiska» kolet. Härtill kommer att framställningen av de valda ämnesgrupperna är mycket skelettartad, de experimentella anvisningarna få och de biologiska och tekniska tillämpningarna rätt knapphändiga.

Det är därför med glädje man måste hälsa den i dagarna utkomna av lektor G. Starck reviderade upplagan av Molls lärobok i organisk kemi. Man bör dock ej tro, att boken realiter svällt ut till det omfång den nu har fått (93 sidor mot förut 34). I densamma har nämligen överförts den ovan omnämnda framställningen av det »oorganiska» kolet. Vidare har kapitlet om bensolderivat, som förut tryckts med fin stil, nu lyfts fram i dagen genom att hållas i normal stilsort, en förändring, som givetvis betingas av dithörande ämnens betydelse. Den framställning av den organisk-kemiska industrien, som hittills endast funnits i läroboken för sjätte klassen, har vidare tagits in också här.

De egentliga nyheterna bestå mera i en fylligare behandling av det gamla stoffet, än i att nya ämnen medtagits. Särskilt kapitlen syror och fettämnen hava sålunda utökats. De ursprungliga försöken, helt få till antalet, hava vidare kompletterats med ett stort antal nya sådana, varjämte alla sammanförts till ett särskilt kapitel i slutet av boken. Medan till exempel kap. kolhydrat i de gamla upplagorna fick åtnöja sig med fem specificerade försök, hava här på samma område upptagits femton. På kap. syror fanns tidigare intet, nu aderton o. s. v.

Försöken äro genomgående väl valda, enkla och instruktiva. Avsikten med att de sammanförts i slutet av boken, är, att denna samtidigt skall kunna användas som hand-

ledning vid lärjungarnas laborationer. Den organiska kemien har hittills nästan betraktats som ett gebit, där lärjungelaborationer ej kunde komma i fråga. Erfarenheterna från Högre reallläroverket å Norrmalm i Stockholm, där sedan detta läsårs början dylika laborationer pågå i ring II i anslutning till undervisningen, visa, att de med största fördel låta sig ordnas. Vissa försök, som kräva vidlyftigare apparater eller större experimentskicklighet, äro avsedda endast att utföras som lektionsförsök. Hit höra detaljerade och instruktiva anvisningar för utförande av elementaranalys på kol och väte samt av molekylarviktsbestämning enligt Victor Meyer. Bearbetaren jävar ej sitt rykte som skicklig och uppfinningsrik experimentator.

Ytterligare en värdefull nyhet är, att ett 50-tal exempel på kemisk räkning och uppskrivning av formler medtagits.

Då författaren till dessa rader råkar vara biolog, kan han ej underlåta att giva uttryck åt några reflexioner rörande samarbetet mellan ämnena biologi och kemi. Såsom förhållandena hittills varit, har på gymnasiet förekommit dels ett slags organisk kemi, som läres under kemilektionerna, dels ett slag, på vissa punkter mer utvidgad, som meddelats av läraren i biologi. Ett önskemål skulle onekligen vara, att dessa finge sammanfalla. Biologerna undervisa t. ex. om vissa ämnen, som eleverna ej få höra talas om i anslutning till den så att säga »officiella» kemien. Ett sådant ämne är glykogen, som härmed efterlyses. Önskvärt vore vidare en något utförligare behandling av äggviteämnena, t. ex. löslighetsförhållandena av albuminer och globuliner. De senare omnämnas för övrigt ej i allmänhet av kemisterna. Även skulle aminosyrorna kunna behandlas något mer ingående. Varför ej redan i anslutning till kursen i organisk kemi införa begreppet kolloider, som i fysiologien spelar så stor roll? Som nu sker, bruka kolloiderna föras på tal i samband med kiselsyra, alltså endast något senare i ring II. Lika osökt skulle de kunna behandlas i anslutning till,

låtom oss säga, kolhydraten, där man har utmärkta exempel på kolloida och kristalloida lösningar. Stärkelseklister lär ju knappast kunna förklaras som en »lösning» av samma slag som t. ex. en sockerlösning, men något annat är nog ej möjligt, om man ej vill ingå på vad som förstås med kolloider. Även för ett förstående av äggviteämnenas reaktioner vore det värdefullt att hava kolloidbegreppet att tillgå. I samband härmed skulle naturligtvis också försök på dialys utföras.

Anmälaren tillåter sig också föreslå införandet av Alméns prov på reducerande sockerarter. Vid kliniskt utförda diabetesprov kommer numera så gott som uteslutande denna metod till användning för kvalitativa bestämningar, medan däremot Fehlings lösning endast begagnas som kvantitativ metod. Det synes därför, som om denna senare skulle kunna, om ej helt avföras, så likväl beredas en mer undanskymd plats (i en framställning sådan som den i föreliggande lärobok, t. ex. med fin stil). Vill man behålla framställningen av kopparoxidulen som reagens, låter sig detta likaväl göras med Trommers prov, då man helt undgår seignettesaltet. I Moll-Starcks lärobok begagnas Trommers prov (utan namn) för att visa de reducerande egenskaperna hos aldehyder. Man kan för övrigt med skäl fråga, varför orsaken till att somliga sockerarter verka reducerande andra icke, alltid förtiges. Man omnämner ju i varje fall aldehyder, och det vore ej att gå mycket längre att påpeka, att man här har med sådana att göra. Men det tyckes höra till traditionen, att man så fort talet faller på kolhydrat, skall åtnöja sig med den empiriska formeln, medan man annars ej drager sig ens för strukturformler.

Det erkännes, att genom dessa föreslagna förändringar, kursen kommer något att utökas, men då väl de flesta biologilärare (som samtidigt äro kemister och tillhöra den moderna skolan, d. v. s. fått någon utbildning i fysiologi) likväl anse sig nödsakade att göra dessa tillägg, så betyder det hela realiter sett blott en överflyttning från ett ämne

till ett annat. Liknande är för övrigt också fallet med överförandet av kolloidbegreppet från den oorganiska kemien till den organiska. Fråga är dessutom, om ej åtskilliga besparingar skulle kunna göras i den oorganiska kemien, där åtskilligt nog medtages som historiska relikter.

Populärvetenskaplig litteratur.

Kemien och det praktiska livet.

Iwan Bolin. *Kemien och vad den lär oss i det praktiska livet.* I. Oorganisk kemi, 3:e uppl., Natur och Kultur, 1924. 233 sid. Kr. 3: —, häft. kr. 2: 25.

— *Den organiska kemien och dess betydelse i det praktiska livet,* Natur och Kultur, 1925. 227 sid. Samma pris.

Ehuru dessa båda arbeten äro avsedda att följas av en tredje del, behandlande den fysiologiska kemien, äro de likväl var för sig så avslutade, att en granskning redan nu icke kan anses olämplig. Förf:s mål har varit att åstadkomma läroböcker i oorganisk och organisk kemi, lämpliga att använda vid självstudier och såsom handledning inom studiecirklar. I överensstämmelse med detta mål och den allmänna läggningen av den bokserie, vari arbetena ingå, äro de elementärt hållna, och särskilt äro de praktiska tillämpningarna kraftigt betonade.

Samtidigt som man erkänner, att båda böckerna äro ett förtjänstfullt tillskott till vår elementära, kemiska läroboks-litteratur, genom sin obundenhet av kursplaner och tidsbegränsning kunnat skrivas både livligare och fylligare än skolböcker och därigenom väl lämpa sig för sitt angivna ändamål, kan man utan att begå någon orättvisa fastslå, att den första delen otvivelaktigt är den mindre betydande av de två. Formellt kunna vägande anmärkningar framställas mot språkbehandlingen, som icke alltid är sober eller ens korrekt. Som ex. må anföras på sid. 20: »Doppas en brinnande tändsticka ned i fotogenen, antändes den ej, utan även tändstickan släckes.» Sid. 94: »Vilken syra man än häller på zink, utvecklas väte» (även sakligt orätt). Sid.

165: »att man med en dukat guld kan förgylla häst med ryttare, och ändock något blir över». Germanismer äro ej ovanliga, t. ex. »bepensling». I en lärobok i kemi borde »värmen» ej få förekomma, utan endast värmet. Här är förf:s språkbruk synnerligen vacklande. På sid. 86, förs. 58 står »den utvecklade värmen» och två rader längre ned »det utvecklade värmet». Ett icke obetydligt antal tryckfel, även meningsstörande, kunde anföras. I tal med många nollor borde dessa avdelas i grupper om tre i stället för att sättas tätt intill varandra, vilket senare nödgar läsaren att läsa såsom småbarn läsa, med pennan i handen.

Förf. inleder sin framställning av kemien med det bekanta järn-svavelförsöket. Här har förf. (liksom tyvärr även undertecknad i en ny uppl. av Molls kemi) kritiklöst upptagit som bevis för att svavel är oflyktigt och olösligt, att det varken har lukt eller smak. Dock äro ju ämnen icke obekanta, som äro flyktiga eller lösliga och det oaktat ha varken smak eller lukt. I en blandning av järn och svavel kan man icke med magnet skilja beståndsdelarna, svavlet adhererar vid järnet.

Vid bild 8 sätter man ett frågetecken, varför framställa vätgas i rundkolv? För en nybörjare vore en burk bättre. På sid. 26 skriver förf., att vatten består av 2 volymer väte och 1 volym syre, och att dess formel *således* är H_2O. Men det måste sägas, att ingenstädes i hela boken gives någon motivering för detta således. Salpetersyrans formel härledes på samma, för nybörjaren absolut oförståeliga sätt (sid. 102). I förs. 23, sid. 28, påvisas vätgasens ringa vikt på så sätt, att två provrör fyllas med väte och hållas en »kort tid», det ena med mynningen uppåt, det andra med mynningen nedåt. Här hade tiden bort närmare angivas, såvida ej eleven själv skall utprobera den. Men knappast torde det kunna inträffa, att båda rörens innehåll blir explosivt; när detta inträffar för det upp- och nedvända provröret, är vätet i det andra för länge sedan borta. På sid. 30 säges, att förbränningsgaserna i skorstenarna väsentligen bestå av kolsyra och vattenånga. Den huvudsakliga bestånds-

delen är kvävgas, och det är icke utan betydelse att påpeka detta, eftersom elever undantagslöst i detta samband glömma bort, att luften innehåller kväve. På sid. 30 säges, att kol med tillräckligt syre förbrinner *direkt* till kolsyra, men det är ett faktum, att det förbrinner till en blandning av koloxid och (några få %) kolsyra. Det vore på tiden, att denna stereotyperade sats bleve mera allmänt beriktigad. På sid. 37 höjer förf. ett varnande pekfinger mot tobakslastens offer genom att utan kommentarer angiva sammansättningen av »röken» från en cigarrett. En varning av denna art kan möjligen ha en suggestiv verkan; den håller icke vid eftertanke och är därför kort sagt homeopatisk. Homeopatien har eljest ingen beundrare i förf., men om dess irrationalitet är till den grad kulturfientlig och samhällsvådlig, att den måste bekämpas även i en lärobok i oorganisk kemi, är en fråga, som ref. vill besvara med ett bestämt nej. Dessa båda parenteser om tobak och homeopati äro för övrigt typiska; förf. har omfattande kunskaper och en livlig, för intet mänskligt främmande fantasi, men frestas härigenom att vilja ge för mycket, att icke sovra det överrika materialet. I det planerade 3:e bandet vore möjligen på sin plats att diskutera homeopatien allvarligt.

På sid. 57 anges, att helium är 4 gånger tyngre än väte, bör vara 2 gånger så tungt. Sid. 83 säges, att den på vatten simmande natriumkulans temperatur ej kan överstiga 100° (vattnets kokpunkt). Skälet är för svagt, och många omständigheter tala för att dess temperatur betydligt överstiger 100°. Förberedande, direkta mätningar, som ref. företagit (se sid. 77), bekräfta, att temperaturen är minst 2—300°.

Bildmaterialet är en blandning av gammalt och nytt. Den gamla knallgasbrännaren (bild 9) skulle ref. önska utbytt mot exempelvis en modern acetylenbrännare. Att i en bok, så modern till sitt innehåll, med interiörer från fabriker för framställning av flytande luft (bild 13) eller salpetersyra ur luft (bild 28) träffa den urgamla masugnen (bild 36) är ägnat att förbluffa. Denna masugn har en yttre diameter, som är 3 gånger så stor som den inre, den balan-

serar sin massiva korpus på ett livsfarligt sätt på nästan ingenting, den är fylld med varvig lera, och den betjänas av två individer på masugnskransen, vilkas melankoliska uppsyn ej kan väcka förvåning. Det är på tiden, att denna vördnadsvärda klisché får sin förtjänta vila efter lång och trogen tjänst.

Med reservation för ovan anmärkta och övriga här ej medtagna brister är denna del likväl att beteckna som en god och innehållsrik elementär lärobok i oorganisk kemi. Till det värdefulla inslaget kunna räknas de 129 enkla försök, som beledsaga texten. Den noggranna beskrivningen bör göra det möjligt för vem som helst, som är i besittning av nödiga utensilier, att eftergöra dem, vilket ju är nödvändigt för ett fruktbart studium. Värdefulla äro kapitlen om metaller och de i all sin korthet instruktiva kapitlen om energi och materie, atomer och elektroner, radioaktivitet och elektrokemi.

Om sålunda den oorganiska delen tack vare mängden av redan föreliggande läroböcker och våra gamla traditioner på detta område ej kan sägas bjuda så mycket nytt, så kan man desto mer reservationslöst och med djup tillfredsställelse i den andra delen hälsa ett arbete, som på ett förträffligt sätt fyller en lucka i vår kemiska läroboks-litteratur. De mera omfattande, svenskspråkiga läroböckerna i organisk kemi (Widman, Hjelt-Aschan) äro avsedda för högskolebruk och bära motsvarande akademiska prägel. Läroböckerna för skolan hava på grund av den oproportionerligt korta tid, som anslagits åt den organiska kemien, nödgats till det minsta möjliga inskränka det meddelade kunskapsstoffet. Vår kemiska undervisningsplan har alltid varit starkt traditionsbunden och anknyter till Berzelius och den första starka utvecklingen av den oorganiska kemien. 70—90-talens kolossala framsteg inom den organiska kemien lämnades i skolan obeaktade, säkerligen mycket därför, att den akademiska undervisningen i organisk kemi ignorerade dess praktiska tillämpningar. Den moderniserade biologiundervisningen och insikten, att den

organiska kemien har en praktisk betydelse minst lika stor som den oorganiska, ha framtvingat ett något bättre tillstånd, men fortfarande är den organiska kemien missgynnad till förmån för den oorganiska. Att inom ramen av den nuvarande eller blivande kursplanen rätt avväga den oorganiska, den organiska och den fysikaliska kemiens krav på utrymme, blir ingen lätt uppgift. Säkerligen måste den oorganiska kemien starkt beskäras.

I d:r Bolins »Organiska kemi» hava vi fått den första svenska på en gång elementära, innehållsrika och till praktiken anknytande framställningen av den moderna, organiska kemien. Det är ett synnerligen imponerande material, som förf. här erbjuder läsaren utan att framställningen blir på något sätt kompendiös. Antalet registerord är icke mindre än 900, medan den oorganiska delen endast uppvisar halva antalet. I det inledande kapitlet behandlas det fria kolet, varvid förf. för det tidigare med orätt s. k. amorfa, i själva verket grafitiska kolet inför beteckningen kristalliniskt kol, som förefaller lyckligt funnen. Därefter följer den egentliga organiska kemien. Ämnets indelning är densamma, som första gången (såvitt ref. ej alltför mycket misstager sig) förekommer i Noyes' lärobok, i det förf. frångår den traditionella indelningen i alifatiska och cykliska föreningar och i stället behandlar alla kolväten i ett sammanhang, syror i ett, o. s. v. Överallt möter man utvikningar till industri och praktik, även de allra senaste landvinningarna.

Bokens värde förhöjes ytterligare genom de 171 noggrant beskrivna försök, som åtfölja texten. Just dessa försök, oftast utförbara med de enklaste hjälpmedel, äro mer än något annat ägnade att ge en levande bild av den organiska kemiens betydelse. För den, som bedömer den organiska kemiens experimentella möjligheter efter den akademiska »organiska kursen», torde det vara en överraskning, att den i själva verket erbjuder en sådan rikedom på enkla demonstrationsförsök. Slutligen illustreras boken av 45 goda och moderna bilder, såväl enkla apparater som fabriksinteriörer.

Den säkerhet, varmed förf. sakligt behärskar sitt ämne, har satt lysande spår i språkbehandlingen, som här är osökt korrekt, för att icke säga mönstergill.

De enda misstag ref. funnit äro, dels att alkoholångor äro lättare än luft (sid. 80), dels att vinsten är lättlösligt i vatten (sid. 110). Den senare uppgiften dementeras för övrigt några rader längre ned.

Arbetet kan på det varmaste rekommenderas ej blott åt nybörjare, utan även åt lärare — på grund av sitt rika innehåll, det stora antal försök, som det bjuder, och på grund slutligen av den fängslande framställningen. Det är förtjänt av den vidaste spridning bland alla bildningssökande. *G. S.*

Atomfysiken — ett nytt moment i en omfattande kurs.

Gunnar Starck, *Materiens struktur.* Natur och Kultur, 1923. 184 sid. Kr. 3: —, häft. kr. 2: 25.

Lars Vegard, *Materiens byggnad och atomernas inre* (övers. från norskan), J. A. Lindblads förlag, 1925. 87 sid. Häft kr. 2: —.

Ellen Gleditsch, *Radioaktivitet och grundämnesomvandling* (övers. från norskan), samma förlag, 1925. 79 sid. Häft. kr. 1: 75.

Redan för ett par årtionden sedan började fysikens målsmän vid våra skolor bli bekymrade över det hastigt växande kunskapsstoffet i deras ämne. Hur skulle det bli möjligt, att på den begränsade tid, som stod fysiken till buds, kunna utom den förutvarande, icke så obetydliga kursen hinna få med en vederbörlig behandling av alla de nya upptäckter och uppfinningar, vilka, den ena efter den andra, i hastig följd överraskade mänskligheten kring sekelskiftet och åren därefter? Ställningen har sedan dess ingalunda

förbättrats, snarare tvärtom, ty utvecklingen av särskilt den fysiska vetenskapen och dess tekniska tillämpningar har ju försiggått med alltjämt växande hastighet. Åt alla håll har fysiken skjutit nya skott, som växt ut till nya vetenskapsgrenar, av vilkas frukter våra gymnasier måste bjuda sina alumner åtminstone en liten smakbit. En hjälp i arbetet är, att dessa nya områden ha aktualitetens intressebetoning och därför gärna mottagas av eleverna och rent av ge ökad glans och ökat värde åt undervisningen. Redan i första ringen inträder sålunda aerodynamiken med sina aktuella tillämpningar: aeroplanet och rotorfartyget. I andra ringen frestas läraren att i samband med lösningars och legeringars stelningspunkt nämna något om metallografiens metoder och betydelse. Värmelärans andra huvudsats har han också svårt att alldeles förtiga, och behandlingen av värmemotorer av olika slag är en fordran, som hans motorintresserade elever med säkerhet uppställa. I tredje ringen finner han, hur växelströmsläran väcker stort intresse. Liksom undertecknad kan han råka ut för, att eleverna själva förfärdiga den omformare och trefasmotor, som skolans instrumentsamling saknar. Här finner han också, att större delen av klassen består av fullfjädrade radiotelegrafister. När man nått fjärde ringen, nalkas man den hotande studentexamen med dess fysikskrivning. För att hinna ge eleverna tillräcklig färdighet att lösa dynamiska uppgifter bruka vi i den skola jag tillhör börja denna ring med dynamiken. Tyvärr måste nog varje lärare av bristande tid här förbigå en verklig behandling av rotationsrörelser med tröghetsmoment och vad därtill hör, men några ord om snurran, gyroskopet och Foucault's pendel försöker han nog få med, såvida han icke redan i första ringen i samband med tröghetsbegreppet fått tillfälle därtill. Som en strålande avslutning på fysikkursen följer sedan den teoretiska optiken, läran om den strålande energien, där vi bland mycket annat underbart få erfara, hur röntgenstrålningen avslöjar de fasta kropparnas struktur, och där vi få kasta en blick in i atomens mikrokosm.

Här är det dock icke första gången man möter atombegreppet och gör bekantskap med våra dagars nya vetenskap — atomfysiken. I själva verket genomlöper problemet om materiens byggnad hela fysik- (och kemi-)kursen som en röd tråd, dock icke den enda — energiprincipen är en annan. Redan i femte klassens och mera bestämt i första ringens kemikurs brukar den Daltonska atomen — atomen i kemisk mening — komma in. I första ringens fysikkurs leda oss försöken med löslighet, diffusion och kolloider till fysikens molekylbegrepp, och i såpbubblans tunna hinna, liksom i oljehinnan, finna vi en övre gräns för molekylens storlek. I värmeläran — vi äro nu i andra ringen — framstår betydelsen av molekylbegreppet klarare, och vi skymta den kinetiska gasteorien. I realgymnasiets andra ring kommer kemiläraren in på elektrokemien, och lämpligt är då att låta även fysikkursen behandla detta område, i det vad som behöves av elektrostatiken samt elektricitetsströmningen genom gaser uppskjutes till längre fram. Här uppenbaras således, att även elektriciteten har atomistisk struktur — vi göra bekantskap med joner och elektroner. När sedan urladdningen genom gaser behandlas, återfinna vi (de negativa) elektronerna som katodstrålar. Vi lära också känna gasjoner — t. ex. kanalstrålarna — och vi visa, hur elektronernas storlek och laddning kunna bestämmas. Nu äro förberedelserna avslutade, och i fjärde ringen angripa vi atomfysikens stora problem. Kemikursen behandlar de radioaktiva atomernas sönderfallande och grundämnenas isotopi, medan i fysiken strålningsläran, såsom ovan antyddes, ger oss möjlighet att avslöja atomens byggnad.

Denna lätt skisserade plan för atomfysikens behandling på gymnasiet ingår ju icke i några som helst detaljer. Det är uppenbart, att åtskilliga av dessa erbjuda besvärliga problem, vilka det vore av värde att få diskuterade. Icke minst bekymmer vållar naturligtvis svårigheten att medhinna det som är önskvärt såväl inom atomfysiken som inom övriga, ovan omnämnda delar av fysiken. I de flesta

fall blir man nog nödsakad överlämna åt de intresserade lärjungarna att genom självstudium skaffa sig en fylligare bild av lärarens mer schematiska och kortfattade framställning. Det är då nödvändigt att ha tillgång till lämplig litteratur att sätta i deras händer, och lyckligtvis finnas just inom atomfysiken en del populära, vederhäftiga och icke för voluminösa framställningar.

Främst bland dessa ställer jag lektor G. Starcks »Materiens struktur». Framställningen i denna bok följer i huvudsak den ovan skisserade lärogången. Möjligen redan i första ringen och säkert i den andra kan man därför anbefalla detta arbete som »bredvidläsning». Det som ovan upptagits som de två första ringarnas kurs i atomfysik motsvarar i denna bok de 66 första sidorna. Härefter följer i anslutning till den nämnda planen ett kapitel om katodstrålar och en redogörelse för Millikans bestämning av elektronens absoluta laddning. Efter ett kort kapitel om de radioaktiva ämnena redogöres för de atommodeller, som föregingo Bohrs teori. Spektra, röntgenstrålar och läran om energikvanta äro kapitel, som förbereda framställningen av denna teori och dess vidare utveckling genom bl. a. Sommerfeld. Förf. redogör därefter för upptäckten av de isotopa elementen samt hur genom Astons och Dempsters undersökningar isotopien visades vara en rätt allmän egenskap hos grundämnena, varigenom det periodiska systemets gåta förklarades i bästa överensstämmelse med den oberoende av detta system, på rent fysikaliska grunder uppbyggda Bohrska atomteorien, vilken förvisso bildar toppunkten av våra dagars fysik — atomfysiken. Nästa epok — kärnfysiken — har redan inletts genom Rutherfords lyckade kärnspjälkningar och den därav föranledda teorien om atomkärnans konstruktion. Till slut omnämnas de av von Laue samt W. H. och W. L. Bragg anvisade vägarna att bestämma de fasta kropparnas struktur med tillhjälp av röntgenstrålning, varigenom för de fasta kropparna molekylbegreppet fått en förut oanad betydelse. De gåtfulla krafter, som förena atomerna till molekyler, ha lockat Kossel till att uppställa

en valensteori, för vilken författaren lämnar en kort redogörelse, och i vilken han anar en ny epok i den kemiska vetenskapens historia.

»Materiens struktur» föreligger redan i sin tredje upplaga och åskådliggör genom sin i förhållande till den första upplagan avsevärt ökade volym atomfysikens snabba frammarsch under de sista åren. Inarbetandet av det nytillkomna stoffet har icke vållat några svårigheter. Man märker det egentligen endast på en punkt, när förf. på sid. 138 omtalar Prouts hypotes såsom bekant, fastän den behandlas först på sid. 144. Därjämte borde fig. 25 ha framflyttats till sid. 126. Några smärre tryckfel och en uteglömd bokstav i fig. 29 kunna icke förbrylla läsaren. Sättaren borde dock ha tillhållits att ej avdela uran I (sid. 78) och NaCl (sid. 173) på två rader. Men allt detta är obetydligheter och förringar på intet sätt bokens synnerligen stora värde. I bästa mening pedagogisk, vederhäftig, koncentrerad men ändå lättläst, måste den rekommenderas till envar, som vill sätta sig in i våra dagars viktigaste fysikaliska problem.

Något mer kortfattad är den nyligen utkomna översättningen av ett i Det norske studentersamfunds folkskrifter ingående arbete av professor Lars Vegard, vilket i sin svenska dräkt bär titeln »Materiens byggnad och atomernas inre». I huvudsak företer, som man ju också kan vänta, detta arbete samma innehåll som det ovan refererade i Starcks bok. Framställningen är dock ytligare och tillfredsställer icke den, som vill tränga djupare in i problemet, men för den, som endast eftersträvar en lättfattlig och lättläst orientering på det nya vetenskapsgebitet, är den mycket lämplig. Värdet förhöjes naturligtvis därav, att förf. själv varit och är verksam inom den nya vetenskapen, varvid man dock skulle kunna anmärka, att han låtit sina egna spekulationer över atomernas byggnad upptaga väl stor plats i den icke så särdeles digra boken.

Förf. har också roat sig med att uppfinna en ny massenhet, ett atogram (Agr) $= 10^{-24}$ gram, vilket synes mig tämligen onödigt. Att låta O beteckna atomnumret förefaller

också mindre lämpligt, bättre är den av Starck använda beteckningen *Z*. Förutom några mindre väsentliga tryckfel finner man en del oegentligheter, vilka måhända i ett par fall kunna skyllas på översättaren. Sid. 21, rad 19 uppifrån bör stå »toppar ligga»; sid. 23, rad 1 bör strontium nämnas före barium; sid. 30, rad 16 kan »med radien *R*» saklöst utgå. Något längre ned på denna sida säges elektronens radie vara 100 000 gånger mindre än atomens, vilket ju är riktigt, men på sid. 38 anslås elektronens »tvärsnitt» till 1/10 000 av atomens, vilket väl icke är sant, även om man — såsom synes framgå av sid. 40 — något oegentligt med »tvärsnitt» menar diameter. På sid. 60, rad. 7 får man veta, att »röntgenstrålarna visa sig som skarpa linjer», och något längre ned på samma sida säges, att »vätet har flera spektrallinjer, en i den ultravioletta delen, en i den synliga, en i den ultraröda». Undertecknad har aldrig lyckats se några röntgenstrålar men väl fler än en linje i vätgasens synliga spektrum.

Boken prydes med bl. a. en del porträtt av atomfysikens märkesmän. Med anledning av två schematiska figurer över apparatanordningar (fig. 6 och 10) skulle jag vilja anmärka, att man vid överflyttning av en figur från ett utförligare arbete till en populär skrift bör angiva, var en fullständig beskrivning av denna figur kan återfinnas. Nu ser läsaren en hel massa underliga linjer och ett flertal bokstäver, till vilka boken icke lämnar någon som helst förklaring. Bättre är det då att, såsom skett i lektor Starcks bok, förenkla figuren ännu mer, avlägsna ur densamma onödiga detaljer och endast medtaga det väsentliga, som beskrives i texten.

Kapitlet om de radioaktiva fenomenen saknas i denna bok. Förf. hänvisar till ett annat i samma populära bokserie utgivet häfte av docenten Ellen Gleditsch, »Radioaktivitet och grundämnesomvandling». Detta arbete har naturligtvis ett rikare innehåll än motsvarande lilla kapitel i Starcks bok. Så finner man här exempelvis ett intressant kapitel om »radioaktivitet och geologi». Översättningen

— av d:r Astrid Cleve-Euler — är välgjord och kommer säkert att bidraga till att göra den intressanta och lättlästa boken allmänt omtyckt. Att i dessa arbeten några uppgifter rörande kärnforskningen redan hunnit bli litet föråldrade eller i någon mån ofullständiga är ej att förvåna sig över, när det gäller en vetenskap i så hastig utveckling som atomfysiken. *Ernst Herlin.*

Ungdomen och ingenjörskonsten.

Ellison Hawks, *Ungdomens ingenjörsbok*, bearbetad av Gösta Svensson och L. A:son Améus, Natur och Kultur, 1925. 320 sid. Kr. 6: 75, häft. kr. 5: —.

Envar ungdomsvän gläder sig åt pojkarnas intresse för mekaniska frågor, för maskiner, verktyg, experiment o. dyl. och söker på olika vägar tillgodose och uppmuntra detsamma. Ovannämnda bok synes mig vara ett synnerligen värdefullt tillskott till ungdomslitteraturen på området. Den är skriven i en lättläst och lättfattlig berättelseform, den är intresseväckande, instruktiv och vederhäftig. Bland kapitelrubrikerna må nämnas: ingenjörskonstens romantik, något om forntidens ingenjörskonst, ångmaskinens utveckling i äldre tider, den moderna ångmaskinen, turbiner, järnvägar, ångfartyg, brobyggnader, tunnlar, kanaler och fyrar. Sista kapitlet: hur man blir ingenjör, behandlar den tekniska undervisningen i vårt land, villkoren för inträde i olika slag av undervisningsanstalter m. m.

Illustrationerna, ett 160-tal, äro väl valda och belysande, papper och utstyrsel förstklassiga. Boken lämpar sig utmärkt till premiebok för pojkar från 12 år och uppåt. Den bör icke saknas i något lärjungebibliotek. *H—m.*

Till redaktionen insända böcker

(som utkommit under senare tid).

Matematik.

HERMODS KORRESPONDENSINSTITUT (undervisning pr korrespondens) *Algebra*, brev 14—18, 1924—25, *Funktionslära*, brev 1—7, 1918—24, *Elementär trigonometri*, brev 1—12, 1918—25.

RUBEN MATTSON, *Lärobok i rymdgeometri för realgymnasiet*, P. A. Norstedt & Söners förlag, 1924. 89 sid. Kr. 2: 90. *Dito för latingymnasiet*, 1924. 70 sid. Kr. 1: 80.

J. S. HEDSTRÖM och C. RENDAHL, *Analytisk geometri*, Albert Bonniers förlag, 1924, 162 sid. Kr. 4: —.

HJALMAR OLSON, *Plan geometri*, för realskolor, mellanskolor, högre folkskolor och därmed jämförliga läroanstalter, J. Beckmans förlag, 1925. 134 sid. Kr. 2: 60.

HARALD YNGVE LARSON, *Lärobok i geometri*, motsvarande Euklides' första, tredje och fjärde böcker jämte övningsuppgifter, Almqvist & Wiksells förlag, 1925. 100 sid. Kr. 3: 75.

RUBEN MATTSON, *Lärobok i geometri för realskolans sjätte och kommunala mellanskolans fjärde klass*, P. A. Norstedt & Söners förlag, 1925. 44 sid. Kr. 1: 20.

CARL BODLUND, *Geometriska räkneuppgifter* för realskolan och mellanskolan, samma förlag, 1924. 20 sid. Häft. kr. 0: 50.

C. L. LOHMANDER, *Sifferekvationer av första graden*, se sid. 83.

ALFRED UDDHOLM, *Lärobok i matematik*, se sid. 83.

GUSTAF LINDBORG, *En samling matematiska repetitionsproblem*, se sid. 83.

LIVIUS STENBÄCK, *Matematiska uppgifter i realskolexamen* v. t. 1907—v. t. 1925, A.-B. Magn. Bergvalls förlag, 1925. 48 sid. incl. systematiskt register. Kr. 0: 75.

A. A. ARVIDSSON, *Räknetabeller* för realskolor och kommunala mellanskolor, P. A. Norstedt & Söners förlag, 1925 (innehåller kvadratrötter ur 1—999 och 0,0—99,9, kvadrater på 1—999, räntetabell och kuber på 1—99). 9 sid. Kr. 0: 60.

J. S. HEDSTRÖM och C. RENDAHL, *Tabeller för realskolexamen*, Albert Bonniers förlag, 1925 (innehaller kvadrater på 1—999, kvadratrötter ur 1—999 och 0,0—99,9, digniteter, udda tals upplösning i primfaktorer, två räntetabeller, konstanten π, cirkelns omkrets och yta). 12 sid. Kr. 0: 75.

M. Antonsson och I. Norgren, *Lärobok i handelsräkning* (för de yrkesbestämda högre folkskolorna med handelsundervisning), A.-B. Magn. Bergvalls förlag. Upplaga A, del I, 1924, 60 sid. + facit, kr. 2: —; del II, 1925, 58 sid. + facit, kr. 1: 75; del III, 1925, 69 sid. + facit, kr. 2: —. Upplaga B, 1924, 47 sid. + facit, häft. kr. 0: 90.

Fritz Johanson och Axel Lagerqvist, *Hemräkneuppgifter*, repetitions- och övningsexempel till förf:s lärobok i räkning, samma förlag, 1924, 25. Tre häften à 32—36 sid. + facit. Kr. 0: 50 per häfte.

Alb. Lövgren, *Exempelsamling i matematik* för inträdessökande till folk- och småskoleseminarier, Skolornas läroboksförlag A.-B., 1924. 26 sid. + facit. Kr. 1: —.

Frits Wigforss, *Den grundläggande matematikundervisningen*, översikt av folkskolans kurs i räkning och geometri ur metodisk synpunkt, A.-B. Magn. Bergvalls förlag, 1925. 127 sid. Häft. kr. 3: —.

Fysik och kemi.

Tom Moll, *Lärobok i fysik* (utgiven av Ture Rudberg), P. A. Norstedt & Söners förlag, 1924. I. Statik jämte satser ur dynamiken, 101 sid. + 2 synopt. kartor. Kr. 1: 80. II. Värmelära, 84 sid. + 2 kartor. Kr. 2: —. IV. Akustik och optik, 125 sid. Kr. 2: 75. V. Dynamik, 67 sid. Kr. 1: 55.

— Förkortad upplaga. I. 71 sid. Häft. kr. 1: 20. II. 67 sid. + 2 kartor. Häft. kr. 1: 50.

Ivar J:son Malmborg, *Lärobok i magnetism och elektricitet för realgymnasium*, samma förlag, 1925. 182 sid. Häft. kr. 3: 90.

— För latingymnasiet. 133 sid. Häft. kr. 2: 90.

Sven Em. Ohlon, *Lärobok i fysik*, samma förlag. I. Allmän fysik, 1924. 112 sid. Häft. kr. 2: 90. II. Värmelära, 1924. 102 sid. Häft. kr. 2: 90. III. Elektricitetslära, 1924. 139 sid. Häft. kr. 3: 30. IV. Vågrörelselära, akustik och optik, 1925. 136 sid. Häft. kr. 3: 30.

C. Bergholm, *Lärobok i Fysik för Gymnasiet*, J. A. Lindblads förlag. I. Allmän fysik, 1922. 111 sid. Kr. 2: —. II. Värmelära, 1922. 111 sid. Kr. 2: —. III. Magnetism och elektricitet, 1923. 149 sid. Kr. 3: —. IV. Akustik och optik, 1925. 145 sid. Kr. 2: 75. V. Mekanik, 1925. 61 sid. Kr. 1: 40.

Tom Moll—G. Starck, *Lärobok i kemi för realskolan*, P. A. Norstedt & Söners förlag, 1924. I. Femte klassens kurs. 53 sid. Häft. kr. 0: 80. II. Sjätte klassens kurs. 52 sid. Häft. kr. 0: 75.

— *Lärobok i kemi för realgymnasiet.* II. Organisk kemi, se sid 92.

G. Starck, *Lektions- och laborationsförsök i organisk kemi*, särtryck ur föreg. 30 sid. Häft. kr. 0: 60.

Populärvetenskaplig litteratur.

ÖSTEN BERGSTRAND, *Astronomi*, Albert Bonniers förlag, 1925. 752 sid., 316 illustr. Häft. kr. 37: 50.

ERNST HERLIN, *Fysiken i vardagslivet. I. Vila och rörelse*, Natur och Kultur, 1925. 173 sid. Kr. 3: —, häft. kr. 2: 25.

HJ. TALLQVIST, *Energi och entropi*, samma förlag, 1924. 160 sid. Samma pris.

OSCAR KLEIN, *Vad vi veta om ljuset*, samma förlag, 1925. 294 sid. i 2 delar à kr. 3: —, häft. kr. 2: 25.

HARALD K. SCHJELDERUP, *Relativitetsteoriens världsbild* (övers. från norskan), J. A. Lindblads förlag, 1925. 64 sid. Häft. kr. 1: 50.

ELLEN GLEDITSCH, *Radioaktivitet och grundämnesomvandling*, se sid. 102.

LARS VEGARD, *Materiens byggnad och atomernas inre*, se sid. 102.

GUNNAR STARCK, *Materiens struktur*, se sid. 102.

ARTHUR HAAS, *Naturen enligt den moderna fysiken* (övers. från tyskan), P. A. Norstedt & Söners förlag, 1925. 157 sid. Häft. kr. 3: 75.

IWAN BOLIN, *Kemien och vad den lär oss i det praktiska livet*, se sid. 97. — *Den organiska kemien och dess betydelse i det praktiska livet*, se sid. 97.

CARL C:ZON CALDENIUS och RAGNAR SANDEGREN, *Vårt land under och efter istiden*, Natur och Kultur, 1925. 159 sid. + 1 karta. Kr. 3: —, häft. kr. 2: 25.

EDWARD CRESSY, GÖSTA HARTZELL, GUNNAR TÖRNSTRAND, *Uppfinningar och upptäckter* med förord av Iwan Bolin, Natur och Kultur, 1925. 331 sid. Kr. 11: —, häft. kr. 9: —.

ELLISON HAWKS, *Ungdomens ingenjörsbok*, se sid. 108.

IVAR MALMER, *Rotorfartyget och dess fysikaliska underlag*, J. A. Lindblads förlag, 1925. 79 sid. Häft. kr. 2: —.

Kortare meddelanden m. m.

Minskning i antalet hemskrivningar.

Det kan möjligen vara av intresse för tidskriftens läsare att taga kännedom om en framställning från kollegiet vid Högre reallläroverket å Östermalm till Skolöverstyrelsen i syfte att ernå en minskning av antalet hemskrivningar i gymnasiets två högsta ringar. Frågan har nämligen sin särskilda betydelse just beträffande ämnena matematik och fysik. I sin motivering framhåller kollegiet bl. a., att skolkommissionen förordat, att skrivningarna i största möjliga utsträckning skulle förläggas till skolan. Vidare erinras om den starka arbetsbelastning, som påvilar eleverna i ring. III och IV. Å läsordningen upptagas 39 à 41 lektioner pr vecka. Läxöverläsningstiden uppgår enligt en beräkning av medeltalen för de 4 sista läsåren vid tre högre allm. läroverk i Stockholm (reallinj.) till för ring IV 25 tim. 24 min. och för ring III 19 tim. 8 min. pr vecka. Dessa beräkningar grunda sig på av lärjungarna själva givna siffror, vilka naturligtvis äro osäkra. Men då de bygga på ett stort antal uppgifter från tre olika läroverk under fyra skilda läsår, torde de dock giva en tillnärmelsevis riktig bild av förhållandena. För att få ett mått på elevernas hemarbete måste till den nyss angivna överläsningstiden läggas den tid, som hemskrivningarna kräva. En beräkning med samma material som ovan giver såsom medeltal för en hemskrivning i matematik och fysik i ring IV resp. 5 tim. 43 min. och 5 tim. 17 min.; i ring III resp. 5 tim. 22 min. och 5 tim. 17 min. Det torde icke råda något tvivel om, att icke dessa hemskrivningar, där de utföras självständigt och med omsorg, utgöra en tung extra

börda för eleverna. Läxor kunna från skolans sida någorlunda jämnt fördelas på veckans olika dagar. Men man kan väl förstå en lärjunges benägenhet att för varje dags nödvändiga läxarbete skjuta undan hemskrivningen så länge, som han anser sig kunna. Mången utför sin hemskrivning eller en stor del därav först under det sista dygnet före inlämningsdagen, kanske under den sista natten. Vinsten av ett sådant arbete svarar icke mot ansträngningen, fastän denna lätt kan leda till överansträngning. Ännu mindre blir behållningen av hemskrivningen, om lärjungen faller för frestelsen att taga olämplig hjälp vid eller i stället för eget arbete.

Beträffande hemskrivningarna i matematik och fysik i ring. III och IV anser kollegiet, att de utan nämnvärd olägenhet kunna indragas. Eleverna få tillräcklig övning i problemlösning vid läxgenomgång och under lektionerna. Nödig färdighet i rent formell framställning bör ha förvärvats genom de matematiska skrivningarna i första och andra ringarna. Den avsevärda tid, som hemskrivningarna kräva, åtgår ej sällan till huvudsaklig del för uppgifternas inskrivning; dessa skrivningar tillvinna sig för övrigt föga intresse från elevernas sida. Kollegiet ansåg därför, att de ej ha någon egentlig uppgift att fylla utan utgöra slöseri med tid och kraft, varför de böra utgå. I de indragna hemskrivningarnas ställe skulle insättas korta skolskrivningar omfattande en halv läsdag (d. v. s. tiden före eller tiden efter frukost), varvid läsningen återstående halva läsdag skulle fortgå utan rubbning.

Såsom en sammanfattning framhåller kollegiet, att en inskränkning i antalet hemskrivningar i angiven omfattning (i ring. III och IV skulle hemskrivningarna i matematik och fysik helt utgå, varjämte i tyska och engelska endast *en* hemskrivning pr termin och avdelning skulle bibehållas) och skrivningarnas förläggande till skolan skulle medföra en avsevärd vinst både genom den lättnad i lärjungarnas arbetsbörda, som därigenom utan rubbning i kursplan kunde åstadkommas, och genom den ökade effek-

tivitet, som kunde väntas, vare sig man ser på elevernas övning eller på kontrollen av deras uppfattning och av deras kunskaper. Vinsten i det hela synes så stor, att en uppoffring av ett mindre antal lektionstimmar däräv väl uppväges. Förslaget skulle icke medföra rubbning i något hänseende av nuvarande skolskrivningar.

Till svar på nämnda hemställan uttalar Skolöverstyrelsen »såsom sin mening, att bestämmelserna i nu gällande undervisningsplan för gymnasiet icke synas lägga hinder i vägen för en anordning av skrivningarna enligt de i läroverkskollegiets protokoll uppdragna riktlinjerna».

I enlighet härmed ha fr. o. m. innevarande termin hemskrivningarna i ovan nämnd omfattning indragits och ersatts med skolskrivningar. Dessa senare äro endast omnämnda men icke till tiden fixerade på det vid terminens början anslagna skrivschemat. Tidpunkten för de korta skolskrivningarna bestämmes under terminens lopp och i samråd med rektor av vederbörande ämneslärare, när han med hänsyn till undervisningen i klassen finner det lämpligt. Skrivningen förlägges till kl. 8—10.35 f. m. eller 12—2.35 e. m. på dag, då någon skrivsal är ledig och då ämnesläraren har en eller två lektioner i avdelningen. Vakt bestrides av de lärare, som eljest enligt schemat skulle undervisa. Den rubbning i läsarbetet, som dessa skrivningar medföra, torde vara jämförelsevis obetydlig. Inalles har varje avdelning denna termin 6 dylika skrivningar (1 i tyska, 1 i engelska, 2 i matematik och 2 i fysik), tillsammans upptagande 3 hela läsdagar. Skulle lärare (särskilt i ämne med litet timantal pr vecka) anse sig behöva återfå eventuellt förlorad lektion, så sker detta genom utbyte med vederbörande ämneslärare. — Under den korta tid, som anordningen hittills prövats, ha så vitt mig är bekant såväl lärare som elever uteslutande varit tillfredsställda med densamma.

H—m.

Till frågan om enheterna för induktans och kapacitet.

I senaste häftet av tidskriften (juni 1925, sid. 242—244) avtryckes ett förslag till uttalande om enheterna för induktans och kapacitet, som avgivits av den inom Fysiska sällskapet i Stockholm efter lektor Gallanders föredrag tillsatta kommittén. Då det förefaller rimligt, att även resultatet av frågans behandling inom sällskapet meddelas tidskriftens läsare, ber jag få omnämnt, att sällskapet, efter upprepade diskussioner, vid sammanträdet den 13 mars 1925 beslöt att icke göra något uttalande i frågan.

Stockholm i sept. 1925.

Gustaf Ising,
ordf. i Fysiska sällskapet.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

193) Visa, att om

$$(xy+xz+yz)^3=xyz(x+y+z)^3,$$

så äro x, y, z (i godtycklig ordning) i geometrisk progression.

194) I en regelbunden oktaeder lägges ett plan genom en av kanterna, så att det avskär en pyramid $=\frac{1}{4}$ av oktaederns volym. I vilka förhållanden delas de båda kanter, som planet skär?

195) Att upprita en triangel, då α, $b+c$ samt den linje m, som förenar fotpunkterna av h_b och h_c, äro givna.

196) Om $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y+\lambda^2=0$, har

$$\sqrt{(\cos x+\cos y)^2+\lambda^2(\sin x+\sin y)^2}+$$
$$+\sqrt{(\cos x-\cos y)^2+\lambda^2(\sin x-\sin y)^2}$$

ett konstant värde. Vilket? *X.*

197) *ABCD* är en i en given ellips inskriven parallellogram, vars sidor äro parallella med ellipsens lika långa konjugatdiametrar. Sök orten för hörnen i den parallellogram, som bildas av ellipsnormalerna i punkterna *A*, *B*, *C* och *D*. *X.*

198) Att upprita en triangel, då man känner omkretsen, förhållandet mellan två sidor och bissektrisen till den mellanliggande vinkeln. *Iter.*

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar godhetsfullt kunna insändas under adress: Högre reallärоverket å Östermalm, Stockholm.

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.

199) Lös systemet

$$\left.\begin{aligned} x^3 - x &= y^3 - y \\ 3x^2 + 3y^2 &= 5 \end{aligned}\right\}$$

200) Lös ekvationen

$$\cos 3x \cdot \cos x = \cos 2x .$$

201) Från medelpunkten av en reguljär tetraeder dragas linjer till mittpunkterna av två närliggande kanter. Sök vinkeln mellan dessa linjer.

202) Kring en sfär omskrivas en rät cylinder och en rät kon. Sfärens, cylinderns och konens volymer bilda aritmetisk serie. Sök konens höjd och visa, att kropparnas begränsningsytor även bilda aritmetisk serie. Sfärens radie $= r$.

203) I triangeln ABC är $AB = 2\sqrt{3}$, vinkeln $A = 15°$ och omskrivna cirkelns radie 2 dm. Beräkna exakta värdet av triangelns yta!

204) Upprita kurvan $y = \dfrac{x^3}{x^2 + 4x + 5}$.

205) I fyrhörningen $ABCD$ är $AB = BC = a$ och $CD = DA = b$. Visa att maximivärdet av inskrivna cirkelns radie är $\dfrac{ab}{a+b}$.

206) Ellipsen $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{24} = 1$ skär parabeln $y^2 = 22x$ under räta vinklar. Sök a, excentriciteten samt skärningspunktens koordinater.

207) Räta linjen $OA = a$ och $OB = b$ på var sin sida om y-axeln vrida sig kring O (origo) så att y-axeln alltid skär $\angle AOB$ mitt itu. Sök orten för den punkt X, som fullbordar parallellogrammen $AOBX$.

208) A och B äro punkter på resp. x- och y-axlarna, A_1 och B_1 deras projektioner på en rörlig linje genom origo. Sök orten för mittpunkten av A_1B_1. *S. B—n.*

Lösningar till uppg. i. häft. 3. 1924—25.

181) *Produkten av 4 på varandra följande hela positiva tal kan ej vara en jämn kvadrat.*

Varje sådan produkt understiger en heltalskvadrat med 1 enligt identiteten

$$n(n+1)(n+2)(n+3)=(n^2+3n+1)^2-1.$$

Produkten i fråga kan alltså vara jämn kvadrat endast om ett av de fyra talen är noll. Löst av *X*.

182) *Tal med udda antal siffror och av följande beskaffenhet kunna ej vara primtal:*

a) *den första siffran 1, 5 eller 8 och de övriga treor*

b) » » » *7* » » » *ettor*

c) » » » *8* » » » *nior.*

I första fallet kan talet skrivas

$$a\cdot 10^{2n}+3\cdot 10^{2n-1}+3\cdot 10^{2n-2}+\ldots+3\cdot 10+3=$$

$$=a\cdot 10^{2n}+3\cdot\frac{10^{2n}-1}{9}=\frac{(3a+1)10^{2n}-1}{3}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2\cdot 10^n+1}{3}\cdot(2\cdot 10^n-1) & \text{för } a=1\\[2ex] \dfrac{4\cdot 10^n-1}{3}\cdot(4\cdot 10^n+1) & \text{» } a=5\\[2ex] \dfrac{5\cdot 10^n+1}{3}\cdot(5\cdot 10^n-1) & \text{» } a=8.\end{cases}$$

I andra fallet kan talet skrivas

$$7\cdot 10^{2n}+10^{2n-1}+10^{2n-2}+\ldots+10+1=$$

$$=7\cdot 10^{2n}+\frac{10^{2n}-1}{9}=\frac{64\cdot 10^{2n}-1}{9}=\frac{8\cdot 10^n+1}{9}\cdot(8\cdot 10^n-1).$$

I tredje fallet kan talet skrivas

$$8\cdot 10^{2n}+9\cdot 10^{2n-1}+9\cdot 10^{2n-2}+\ldots+9\cdot 10+9=$$

$$=8\cdot 10^{2n}+10^{2n}-1=(3\cdot 10^n+1)(3\cdot 10^n-1).$$

Härav framgår satsens sanning. Löst av *X*.

183) *Vilka hela tal x äro sådana, att $x+1$ och x^2+1 båda äro dubbelt så stora som två jämna kvadrater?*

Ur ekvationssystemet

$$\begin{cases} x+1=2y^2 \\ x^2+1=2z^2 \end{cases}$$

erhålles genom elimination av x

$$y^4+(y^2-1)^2=z^2.$$

På denna ekvation kunna vi omedelbart tillämpa de indiska formlerna. Härvid ha vi att särskilja två fall:

1) *y ett udda tal.*

I detta fall kunna vi sätta

$$y^2=a^2-b^2,\ y^2-1=2ab,\ z=a^2+b^2,$$

där a och b äro rel. primtal av *olika* paritet. Ty om a och b hade en gemensam faktor >1, skulle denna ingå såväl i a^2-b^2 som i $2ab$, således i y^2 och y^2-1. Men dessa båda tal kunna tydligen icke ha någon gemensam faktor >1. Om både a och b vore udda, skulle y vara ett jämnt tal, vilket strider mot antagandet.

Tydligen äro då också de udda talen $a+b$ och $a-b$ rel. primtal. Ty om dessa tal hade en gemensam udda faktor >1, skulle denna ingå även i talens summa och skillnad, således i $2a$ och $2b$, vilket strider mot att a och b äro rel. primtal.

Av likheten

$$y^2=(a+b)(a-b)$$

följer då omedelbart, att $a+b$ och $a-b$ måste var för sig vara exakta kvadrater:

$$a+b=m^2,\ a-b=n^2,$$

där m och n äro rel. primtal, båda udda. Man får då

$$a=\tfrac{1}{2}(m^2+n^2),\ b=\tfrac{1}{2}(m^2-n^2),$$

varav

$$y^2=m^2n^2,\ y^2-1=\tfrac{1}{2}(m^4-n^4),$$

och genom elimination av y^2

$$n^4-1=2\left(\frac{m^2-n^2}{2}\right)^2.$$

Enligt en bekant sats av *Euler* har denna ekvation endast lösningen $m^2=n^2=1$, varav $y^2=1$, således $x=1$.

2) *y ett jämnt tal.*

Vi kunna då sätta

$$y^2=2ab\,,\quad y^2-1=a^2-b^2,\quad z=a^2+b^2,$$

där, såsom förut, a och b äro rel. primtal av *olika* paritet. Då $a^2-b^2=y^2-1=-1$ (mod. 4), inses omedelbart, att a måste vara ett jämnt tal och b ett udda tal. Då vidare $2ab$ skall vara en exakt kvadrat, kunna vi sätta $a=2m^2$, $b=n^2$. Vi få då

$$y^2=4m^2n^2,\quad y^2-1=4m^4-n^4,$$

varav

$$4m^2n^2-1=4m^4-n^4,$$

vilken ekvation kan bringas under formen

$$(2m^2+n^2)^2=8m^4+1\,.$$

Då uttrycket inom parentesen är ett udda tal, kunna vi sätta $2m^2+n^2=2r-1$, varigenom erhålles

$$(2r-1)^2=8m^4+1$$

eller

$$r\,(r-1)=2m^4.$$

Då faktorerna i vänstra membrum icke kunna ha någon gemensam faktor >1, måste den ena faktorn vara en bikvadrat, den andra två gånger en bikvadrat. Vi ha då ånyo att särskilja två fall:

α) *r ett udda tal.*

Sätta vi då $r-1=2p^4$, $r=q^4$, erhålles

$$q^4-1=2p^4.$$

Enligt den anförda satsen av *Euler* har denna ekvation endast lösningen $p=0$, $q^2=1$, varav $r=1$, $m=0$, således $y=0$, $x=-1$.

β) *r ett jämnt tal.*

Sätta vi då $r=2p^4$, $r-1=q^4$, erhålles

$$q^4+1=2p^4.$$

Enligt en bekant sats av *Euler* har denna ekvation endast lösningen $p^2=q^2=1$, varav $r=2$, $m^2=1$, $n^2=1$, $y^2=4$, $x=7$.

De enda möjliga lösningarna äro således $x=-1, 1, 7$.

Löst av *Iter* och *X*.

184) *I en rätvinklig triangel är K skärningspunkten mellan höjden och den linje, som förenar de in- och omskrivna cirklarnas medelpunkter. Visa a) att K ligger på den linje som förenar de spetsiga vinklarnas bissektrisers fotpunkter, b) att K ligger på avståndet r från den räta vinkelns spets.*

Lösning I.

Tages triangelns kateter *CB* och *CA* till koordinataxlar, så är hypotenusans ekvation

$$x\cos\alpha+y\sin\alpha-h=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

höjdens ekvation

$$ax-by=0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

och ekvationen för medianen från *C*

$$bx-ay=0.$$

Om vi nu för korthetens skull beteckna vänstra membrum i (1) med $-z$, så är ekvationen för en godtycklig rät linje genom hypotenusans mittpunkt *M*

$$bx-ay+kz=0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

där k är en arbiträr konstant. Denna ekvation är nämligen av första graden med avseende å x och y och satisfieras av de värden på x och y, som på en gång göra $bx-ay=0$, $z=0$. Skall linjen gå även genom den inskrivna cirkelns medelpunkt *I*, måste (3) satisfieras av dennas koordinater. Om vi då i (3) sätta $x=y=z$, få vi $k=a-b$. Ekvationen för medelpunktslinjen *MI* är således

$$bx-ay+(a-b)z=0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Subtraheras (4) från (2), erhålles

$$(a-b)(x+y-z)=0.$$

För $a=b$ sammanfaller *MI* med höjden. Skärnings-

punkten K är då obestämd.[1] För $a \neq b$ ligger K på linjen

$$x+y-z=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

således på den linje, som förenar de spetsiga vinklarnas bissektrisers fotpunkter A_1, B_1. Ty denna linjes intercept på axlarna äro $(z, 0)$ och $(0, z)$.

Skrivas (5) och (2) under formen

$$\begin{cases} x(1+\cos\alpha)+y(1+\sin\alpha)-h=0 \\ x\sin\alpha - y\cos\alpha=0, \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (2^*)$$

erhålles genom lösning av ekvationssystemet med avseende å x och y

$$(K)\begin{cases} x=\dfrac{h\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=r\cos\alpha, \\ y=\dfrac{h\sin\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=r\sin\alpha, \end{cases}$$

varav följer, att K ligger på avståndet r från den räta vinkelns spets (uttrycket för r erhålles lätt, om man tänker sig den av I:s koordinater och normalen från I mot hypotenusan bildade brutna linjen projicerad på höjden).

På liknande sätt bevisas, att den räta linje, som förenar den omskrivna cirkelns medelpunkt M med medelpunkten I_c till den vidskrivna cirkel, som tangerar hypotenusan och kateternas förlängningar, går genom den punkt K_c, vari höjden mot hypotenusan skär föreningslinjen mellan de spetsiga vinklarnas ytterbissektrisers fotpunkter A', B'. Om vi nämligen i (3) sätta $x=y=-z$, få vi $k=-(a-b)$. Ekvationen för MI_c är således

$$bx-ay-(a-b)z=0. \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

Subtraheras (6) från (2), erhålles, för $a \neq b$,

$$x+y+z=0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

varav satsen omedelbart framgår. Linjen (7) benämnes vanligen I:s harmonikal.

[1] För undvikande av denna obestämdhet borde punkten K hellre ha definierats såsom skärningspunkten mellan höjden och fotpunktslinjen eller mellan denna och medelpunktslinjen.

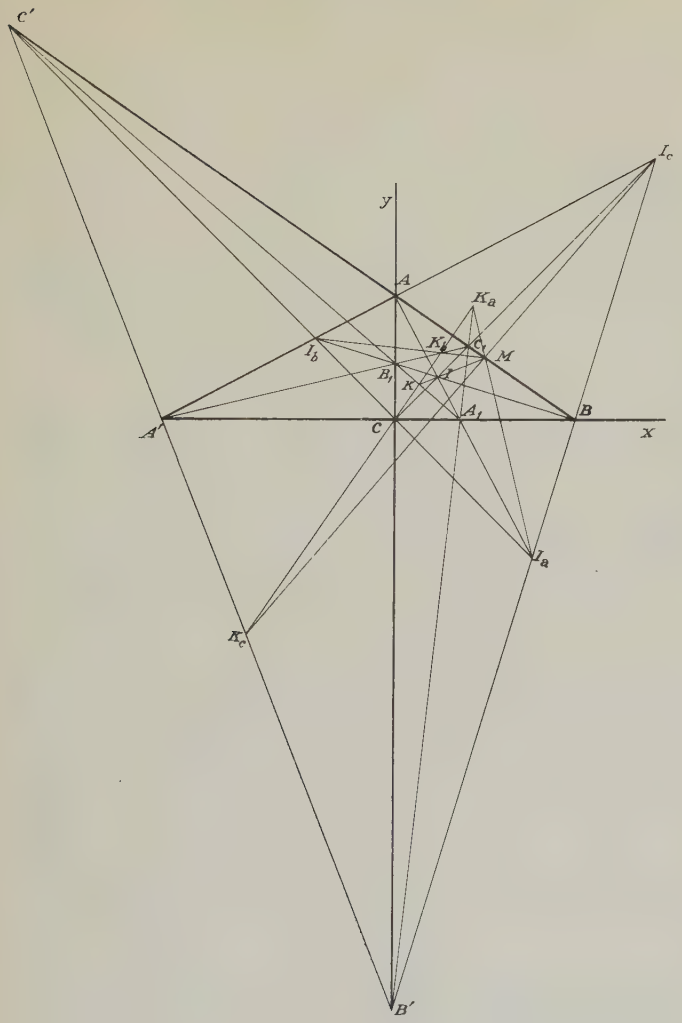


Fig. 1.

Skrives (7) under formen

$$x(1-\cos\alpha)+y(1-\sin\alpha)+h=0,$$

erhålles genom elimination mellan denna och höjdens ekvation (2*)

$$(K_c)\begin{cases} x = -\dfrac{h\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha-1} = -r_c\cos\alpha\,, \\ y = -\dfrac{h\sin\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha-1} = -r_c\sin\alpha\,, \end{cases}$$

varav följer, att K_c ligger på avståndet r_c från den räta vinkelns spets.

En annan anmärkningsvärd egenskap hos vår konfiguration framgår genom addition och subtraktion av (5) och (7). Man finner då, att den räta vinkelns ytterbissektris och de båda fotpunktslinjerna skära varandra i en och samma punkt på hypotenusans förlängning.

För de övriga fotpunktslinjerna gälla liknande satser. Sålunda bevisas lätt, att föreningslinjerna mellan de punkter, i vilka (5) och (7) skära kateterna, gå genom hypotenusans skärningspunkt med den räta vinkelns inre bissektris. De sist anförda satserna framgå även omedelbart ur triangelns, dennas omskrivna bissektristriangels och de inre bissektrisernas fotpunktstriangels perspektivitet (Desarguesska satsen).

Men vår konfiguration har ännu fler beaktansvärda egenskaper. För att påvisa dessa uppställa vi ekvationen för linjen MI_a. Denna erhålles enklast genom att i (3) sätta $x=-y=z$. Man får då $k=-(a+b)$, varav den sökta ekvationen

$$bx - ay - (a+b)z = 0. \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

Genom addition av (8) och (2) erhålles, efter förkortning med $a+b$,

$$x - y - z = 0, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

varav följer, att medelpunktslinjen MI_a skär höjden från C i dennas skärningspunkt K_a med fotpunktslinjen C_1A_1.

Skrives (9) under formen

$$x(1+\cos\alpha) - y(1-\sin\alpha) - h = 0,$$

erhålles genom elimination mellan denna och höjdens ekvation (2*)

$$(K_a)\begin{cases} x = \dfrac{h\cos\alpha}{1-\sin\alpha+\cos\alpha} = r_a\cos\alpha, \\ y = \dfrac{h\sin\alpha}{1-\sin\alpha+\cos\alpha} = r_a\sin\alpha, \end{cases}$$

varav följer, att K_a ligger på avståndet r_a från den räta vinkelns spets. På alldeles samma sätt bevisas, att MI_b skär höjden från C i dennas skärningspunkt K_b med fotpunktslinjen B_1C_1 och att denna skärningspunkt K_b ligger på avståndet r_b från den räta vinkelns spets. *Iter.*

Lösning II.

a) Låt ABC vara en godtycklig triangel, O den omskrivna, I den inskrivna cirkelns medelpunkt. Bissektriserna till vinklarna B och C skära motstående sidor i B_1 och C_1 resp. Enligt Menelaos' sats skär då B_1C_1 sidan BC:s förlängning i A_1 på yttre bissektrisen till vinkeln A. En godtycklig linje AXY genom A skär B_1C_1 i X och BC i Y. Om då IX skär BC i Y_1 och IY skär B_1C_1 i X_1, så ligga enligt fundamentalsatsen för fullständiga 4-sidingar X_1, Y_1 och A i rät linje, så att AXY och AX_1Y_1 äro par i en strålinvolution. Dubbelstrålarna äro de bägge bissektriserna AI och AA_1. Då dessa äro vinkelräta, är AI bissektris även till $\angle XAX_1$. Går nu speciellt AX_1 genom O, blir AXY identisk med höjden AKH mot BC, ty $\angle OAB = \angle KAC = 90° - \gamma$. [$O$ och ortocentrum H äro inversa punkter med avseende på triangeln kan man ock säga.] Om $\angle A = 90°$, får man härur som specialfall 184 *a*).

Anm. Den inskrivna cirkelns medelpunkt etc. kan utbytas med en av de vidskrivna cirklarnas, om motsvarande förändring göres i valet av bissektriser.

b) Vi förutsätta nu $\angle A = 90°$. Om AI skär den omskrivna cirkeln i D, så är $DI = DB = DC = R\sqrt{2}$. Vidare är $AI = r\sqrt{2}$. Enligt *a*) blir nu $\dfrac{AK}{AO} = \dfrac{KI}{OI} = \dfrac{AI}{DI} = \dfrac{r}{R}$. Men $AO = R$ och således $AK = r$.

Anm. Man kan utbyta I och r mot centrum resp. radie för en vidskriven cirkel S, v. s. h. *X.*

185) *Uppgiv antalet reella rötter mellan 0 och* 2π *till ekvationen*

$$4\sin^2 x+(1-m)\sin x+1=0$$

för olika reella värden av m.

Löses ekvationen med avseende å x, erhålles

$$\sin x=\frac{m-1}{8}\pm\frac{1}{8}\sqrt{(m+3)(m-5)}.$$

Den mot ekvationen svarande kurvan ligger således till hela sin utsträckning ovanför linjen $m=5$ och nedanför linjen $m=-3$.

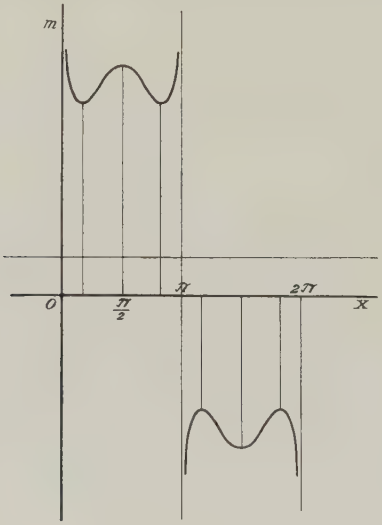


Fig. 2.

Löses ekvationen med avseende å m, erhålles

$$m=4\sin x+1+\frac{1}{\sin x}.$$

För $x=k\pi$ blir således $m=\infty$.

Av uttrycket för derivatan

$$m'=4\cos x-\frac{\cos x}{\sin^2 x}=\cos x\left(4-\frac{1}{\sin^2 x}\right)$$

$$=\frac{4\cos x\,(\sin x+\frac{1}{2})(\sin x-\frac{1}{2})}{\sin^2 x}$$

finner man, att denna försvinner för $x=\frac{1}{6}\pi+k\pi$, $\frac{5}{6}\pi+k\pi$, $\frac{1}{2}\pi+k\pi$. Den är negativ i intervallet $(0, \frac{1}{6}\pi)$, positiv i intervallet $(\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. När x växer från 0 till $\frac{1}{6}\pi$, avtar m från $+\infty$ till 5. När x växer från $\frac{1}{6}\pi$ till $\frac{1}{2}\pi$, växer m från 5 till 6. Då $\sin x=\sin(\pi-x)$, ligger kurvan symmetriskt kring linjen $x=\frac{1}{2}\pi$. Då vidare $\sin(x+\pi)=-\sin x$, erhålles den i intervallet $(\pi, 2\pi)$ liggande delen av kurvan, om man tänker sig den i intervallet $(0, \pi)$ befintliga förskjuten sträckan π i x-axelns riktning och därefter omlagd kring linjen $m=1$. Kurvan har således det utseende, som framgår av figuren. Linjerna $x=0$, π, 2π äro asymptoter, linjerna $m=5$, -3 dubbeltangenter inom intervallet $(0, 2\pi)$. Punkterna $(k\pi, 1)$ äro symmetripunkter.

Av figuren framgår nu omedelbart antalet reella rötter mella 0 och 2π:

$m<-4$,	2 rötter,
$m=-4$,	3 rötter (2 enkla, en dubbelrot),
$-4<m<-3$,	4 rötter,
$m=-3$,	2 dubbelrötter,
$-3<m<5$,	0 rötter,
$m=5$,	2 dubbelrötter,
$5<m<6$,	4 rötter,
$m=6$,	3 rötter (2 enkla, en dubbelrot),
$m>6$,	2 rötter.

Löst av *Iter* och *X*.

186) *Om genom höjdernas skärningspunkt i en triangel (sidor a, b, c vinklar α, β, γ) drages en transversal, som skär sidorna under vinklarna α_1, β_1, γ_1 resp., och p, q, r äro tre icke sammanstötande segment av sidorna, så är*

$$p\cdot q\cdot r=\pm abc\cot\alpha\cot\beta\cot\gamma\cot\alpha_1\cot\beta_1\cot\gamma_1.$$

Enligt Menelaos' sats är det likgiltigt, vilketdera systemet av tre icke sammanstötande segment man väljer. Med figurens beteckningar har man:

$$\frac{r}{c}=\frac{r}{s}:\frac{c}{s}=\frac{\sin x}{\sin\gamma}:\frac{\sin y}{\cos\alpha}.$$

Då emellertid

$$x = 90° - \alpha_1$$

och $y = 180° - \gamma$,

får man, eventuellt på tecknet när i en annan figur,

$$\frac{r}{c} = \frac{\cos\alpha \cos\alpha_1}{\sin\gamma \sin\gamma_1}.$$

Genom cyklisk permutation och hopmultiplicering erhålles härur den påstådda likheten.

X.

Även löst av *Iter*.

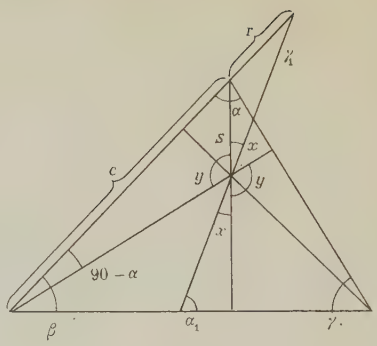


Fig. 3.

Procent- och ränteräkning i skolan och i praktiken.

Av OTTO ENEROTH.

I. Grundregler, med tillämpningar.

Vill man jämföra en variabel storhets talvärden vid början och slutet av ett visst intervall, sker detta enklast genom att ange *förhållandet* mellan det nya talvärdet och det gamla, vilket sålunda tages till mått eller enhet. Kvoten uträknas i hundradelar (procent) eller tusendelar (promille). Tecknet % är enligt TROPFKE (Geschichte der Elementar-Mathematik) en från början oavsiktlig stilisering av förkortningen cto för cento. Promilletecknet är en naturlig analogibildning efter det förra. Promillebegreppet tyckes vara så gott som förbisett i våra läroböcker i aritmetik, dock har det i praktiken rätt stor användning, t. ex. för att få bättre formulering på stämpeltarifferna, vid beräkning av provisioner, mäklararvoden m. m.

Exempel på nyssnämnda metod att *direkt* ange förhållandet mellan det nya värdet och det gamla i procent ha vi uti kurserna på de utländska valutorna samt i obligationskurserna och levnadskostnadsindexen. Vanligare är kanske att jämföra *differensen* mellan det nya värdet och det gamla med det sistnämnda. Då ett varupris t. ex. fördubblas, säger man ju, att prisstegringen utgör 100 %.

Procenträkningens grundregler bli därför:

1. Ökningen eller minskningen uttryckes i procent av det *ursprungliga* värdet.

2. Räntan beräknas på det *räntebärande* kapitalet (nuvärdet eller begynnelsevärdet).

Praktiken fordrar emellertid, att beräkningen utgår från ett värde, som är *känt* och av *väsentlig betydelse* för uppgiften, varigenom resultatet kan ernås genom *enkla aritmetiska* metoder. Dessutom betingas avvikningen från grundregeln av att därigenom *fördel* vinnes för den bestämmande parten.

Exempel 1. Vinsträkningen. Enligt grundregeln skall vinsten, d. v. s. skillnaden mellan försäljningspriset och inköpspriset, räknas i procent på inköpspriset. Detta är också den *traditionella* metoden. I Amerika har det emellertid blivit allt vanligare att taga vinstprocenten på försäljningspriset såsom det för affären väsentligaste. Metoden har även börjat tillämpas i vårt land. Då bägge tillvägagångssätten äro lika *konventionella*, torde det få anses lämpligast att vid problemgivningen i skolan utsätta, om man *önskar*, att procenten skall tagas på inköpspriset eller försäljningspriset. Det är räknefärdigheten, som skall prövas, och ej kunskapen i s. k. affärsusancer. Intresserade hänvisas till Hart and Watts: A Commercial and Industrial Arithmetic for Students of High School Grade (förlag Appleton & C:o, New York, London).

Exempel 2. Växeldiskonteringen. Med avvikelse från grundregeln beräkna bankerna ränteavdraget på växelsumman, ty denna står angiven på växeln och på densamma beräknas såväl stämpelavgiften som inkassoprovisionen, där dylik förekommer. I såväl tyska som svenska läroböcker i handelsräkning sättes bankernas beräkningssätt i motsats mot vad nämnda läroböcker kalla »det matematiskt riktiga beräkningssättet», nämligen grundregeln. Även Tropfke betecknar diskontregeln såsom falsk. Det är den naturligtvis också, om man i likhet med 1600-talets jurister betraktar den som en allmän regel för nuvärdesberäkningen. Men för att slå ned en dylik uppfattning behöver man väl knappast nuförtiden taga sin tillflykt till det drastiska exemplet om diskontavdrag efter 5 % för 20 år, resulterande i nettobeloppet 0. Nuvärdesberäkningen utreddes av Leibnitz, som

visade, att ränta på ränta måste beräknas. I våra dagars läroböcker i handelsräkning nöjer man sig med ett påpekande av att »felet» vid växeldiskonteringen rör sig inom jämförelsevis trånga gränser i anseende till den korta tiden, uppgående till i allmänhet 3 månader. Gentemot hela denna tankegång måste emellertid framhållas, att densamma vilar på ett *godtyckligt antagande*, nämligen att diskonteringen sker efter bankens vanliga utlåningsprocent. Då växeldiskontot visserligen är *normerande* för utlåningsprocenten men ej utan vidare får *identifieras* med densamma, kan det vara av ett visst intresse att för *3-månadersväxeln* beräkna sambandet mellan en *given* diskontsats och den därmed *ekvivalenta* utlåningsprocenten d. v. s. den som ger samma nettobelopp. Man har då en säker utgångspunkt vid jämförelsen mellan de *faktiska* värdena.

Vi införa följande beteckningar:

K = växelsumman, k = nettobeloppet (nuvärdet), p = växeldiskontot, x = den med p ekvivalenta utlåningsprocenten för 3-månaders lån.

Grundregeln ger

$$k + \frac{kx}{400} = K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

Diskontregeln ger

$$k + \frac{Kp}{400} = K \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Av uttrycken på K—k erhålles

$$kx = Kp \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

Elimineras k mellan (3) och (1) eller (2), fås

$$x = \frac{p}{1 - \frac{p}{400}}.$$

Då $p < 400$; kunna vi utveckla uttrycket för x i geometrisk serie.

$$\therefore x = p\left(1 + \frac{p}{400} + \ldots\right),$$

varav approximativt

$$x = p + \frac{p^2}{400},$$

en formel, som ger tillräckligt noggranna värden för den föreliggande uppgiften.
Då erhålles

p	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
x	4,55	5,06	5,58	6,09	6,61	7,12	7,64

Enligt *Riksbankens årsbok*, årgång I—XVIII, omfattande åren 1908—1924 äro ovanstående värden på p de enda, som förekommit under nämnda period. Visserligen sjönk diskontot för en kortare tid under 1908 till 4 %, men övriga räntesatser ändrades ej, varför några motsvarande värden till jämförelse ej finnas. Med anlitande av årsbokens uppgifter sammanställa vi följande tabell, där *samtidiga* värden stå i samma *vertikalrad.*

	I	II	III	IV	V	VI	VII
Officiella växeldiskontot	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
Ekvivalenta utlåningsprocenten	4,55	5,06	5,58	6,09	6,61	7,12	7,64
3-mån. lån mot säkerhet av statens oblig.	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5
3-mån. lån mot säkerhet av kommuners oblig.	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8
3-mån. lån mot annan säkerhet	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5

Av tabellen framgår, att räntefoten stiger i samma mån som den deponerade säkerheten sjunker. Det bör då ej förvåna, att växeln drager högre ränta (andra horisontalraden) än lån mot prima säkerhet (statens obligationer),

gentemot vilka växeln alltid måste uppvisa ett visst riskmoment. Ränteskillnaden är därför i detta fall en riskpremie, som banken har rätt att fordra, och ej en extravinst, som den inkasserar på grund av en förment felaktig räknemetod. Såsom den bestämmande parten uppställer banken *sina villkor* för varje affär, på vilken den inlåter sig. Då banken av trassenten (eller hans order) *köper* dennes *fordran* hos acceptanten, av vilken senare den ej har rätt att kräva någon ränta, begär banken i stället *räntan i förskott* vid växelköpets uppgörande. Detta är det för skolstadiet enklaste resonemanget. Lärjungen får då på samma gång klart för sig vad som i detta sammanhang menas med köpare och säljare, vilket har praktisk betydelse, alldenstund säljaren skall betala omkostnaderna (stämpeln samt i vissa fall provision). Att *diskontera* en växel är nämligen detsamma som att *köpa* den. Det är sålunda *banken,* som diskonterar växeln.

Exempel 3. Handelsrabatten l. kassarabatten. Om priserna på en försäljningsräkning bestämts med hänsyn till en åt köparen utlovad kredit på t. ex. en månad, är räkningens belopp tydligen en slutsumma. Likvideras räkningen omedelbart, får köparen ett visst procentuellt avdrag på räkningens belopp, detta i enlighet med praktikens fordringar. Ehuru här liksom vid växeln avdraget beräknas på slutsumman, undgår handelsrabatten i läroböckerna förebråelsen för att ej vara matematiskt riktig. Anledningen är väl den, att tidsberäkningen ej kommer direkt till synes utan är dold i själva procentsatsen. Anmärkas bör, att i Amerika ordet diskont (trade discount) helt riktigt användes i stället för rabatt.

Anm. ang. rabatt och diskont som motsatta begrepp. I våra gamla ärevördiga, från förra århundradet härstammande läroböcker i algebra betecknas »det matematiskt riktiga beräkningssättet» med ordet rabatt, som då står i motsats mot diskont. I. Hultman kastar i sin handbok i Bankteknik helt om dessa termer, så att de

få en rakt motsatt betydelse mot den nyssnämnda traditionella. Förklaringen är förmodligen den, att vid räkning med sammansatt ränta de tabeller, som ge nuvärdena direkt ur slutvärdena, benämnas diskonteringstabeller. (Se I. Tesdorff: Handbok i ränte- och lifförsäkringsberäkningar.) Som man ser, råder det inom denna terminologi en fullkomlig förbistring. För läraren är detta givetvis en sak att beakta. Önskligt vore nämligen, om en viss nomenklatur kunde fastställas, så att misstag undvekes.

Benämningen rabatt i betydelsen kassarabatt är så fast rotad inom praktiken, att denna betydelse av ordet ej kan eller bör ändras. Detsamma gäller ordet växeldiskonto, som på grund av första sammansättningsledet ej kan missförstås.

Kommer man så till benämningen på nuvärdesräkningen vid sammansatt ränta. Här är det naturligtvis ej alls farligt att i likhet med fackmännen på området använda ordet diskontering, då någon risk för missförstånd ej föreligger.

Vill man vid *enkel* ränteberäkning, att räntan skall beräknas på begynnelsevärdet, så får man säga till därom i själva problemet, dock ej genom att använda ordet rabatt, som är en föråldrad skolterm, vilken bör helt avlysas i detta sammanhang.

(Forts.)

Linsformeln.

Av C. V. L. CHARLIER.

De vid den fysikaliska undervisningen vid läroverken använda formlerna för bestämmande av bildens läge vid optiska linser (centrala strålar) lida av rätt stora olägenheter särskilt genom införande av en rad betungande minnesregler rörande *tecknen* för radierna och avstånden för bild och föremål från (den oändligt tunna) linsen. Man bör observera, att radier *alltid* i matematiken böra betraktas såsom *positiva* kvantiteter. Detsamma gäller om *avstånd* mellan tvenne givna punkter.

Dessutom är beviset för ljusets gång genom den andra ytan besvärlig och i regel (alltid) oriktig, då den redan erhållna formeln (för den första ytan) icke är användbar, utan en ny härledning måste göras för varje särskild linsform.

I det efterföljande skall jag härleda en formel, som utan undantag gäller för alla slag av linser. Härledningen har den fördelen, att diskussionen om de olika linsformerna är återförd till en enda rent matematisk fråga. Beviset torde i den praktiska användningen vid undervisningen kunna betydligt förkortas.

I. Slutformel.

Vi tänka oss läget av föremål, bild och de brytande sfäriska ytornas medelpunkter bestämda längs den optiska axeln på det sätt, som användes inom den analytiska geometrin. Origo lägges i den oändligt tunna linsens optiska medelpunkt, axelns (den optiska axelns) positiva riktning sammanfaller med det anfallande ljusets rörelseriktning.

Låt

a = föremålets x-koordinat,
b = bildens »
m_1 = x-koordinaten för medelpunkten till den första brytande ytan,
m_2 = x-koordinaten för medelpunkten till den andra brytande ytan,

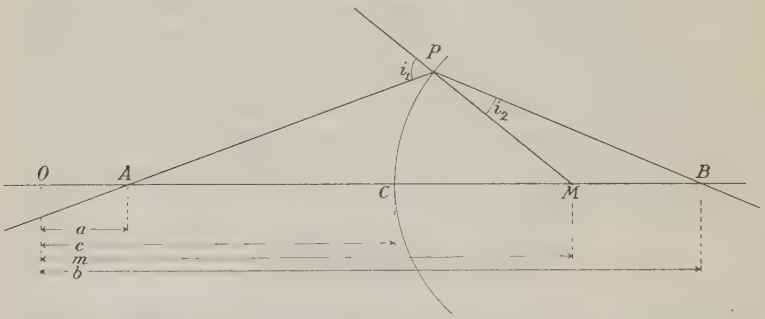
samt låt n_1, n_2, n_1 vara brytningsindices (i förhållande till tomrummet) för resp. det första, andra och tredje mediet.

Då lyder den generella linsformeln för centrala strålar:

$$(1) \quad \ldots \quad \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right).$$

II. Ljusets gång från ett medium till ett annat.

Låt A vara den punkt, där den infallande strålen (utdragen om så behöves) skär den optiska axeln, B vara den punkt, där strålen efter brytningen vid skiljoytan skär samma axel, samt låt M vara medelpunkten för den sfäriska skiljoytan mellan medierna.



Låt P vara den punkt, där den infallande strålen träffar skiljoytan. Sammanbind P med punkterna A, B, M på den optiska axeln. Om i_1 = infallsvinkeln, i_2 = brytningsvinkeln, är

$$\angle APM = i_1 \text{ eller } 180° - i_1,$$
$$\angle BPM = i_2 \quad » \quad 180° - i_2.$$

Enligt den Snellius'ska brytningslagen är

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 ,$$

om n_1 och n_2 äro brytningsindices för de båda medierna. Alltså är ock

(2) . . . . . $n_1 \sin APM = n_2 \sin BPM$.

Ur de båda trianglarna PAM och PBM får man

$$\frac{\sin APM}{\sin PMA} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AP}} ,$$

(3) . . . . . $$\frac{\sin BPM}{\sin PMB} = \frac{\overline{BM}}{\overline{PB}} ,$$

där $\overline{AM}$, $\overline{AP}$ etc. beteckna *sträckorna* (positiva) AM, AP etc. Nu är alltid

$$\sin PMA = \sin PMB$$

och vidare, om man håller sig till *centrala* strålar,

$$\overline{AP} = \overline{AC}, \quad \overline{BP} = \overline{BC} ,$$

så att således enligt (2) och (3)

(4) . . . . . $$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} .$$

Denna formel innehåller den fullständiga lösningen av problemet. Emellertid är det att anmärka, att $\overline{AM}$, $\overline{AC}$ etc. äro *sträckor*, d. v. s. absoluta belopp eller positiva kvantiteter. Om vi nu välja en godtycklig punkt på den optiska axeln till origo och låta a, b, c, m vara x-koordinaterna för resp. föremålet, bilden, den sfäriska ytans skärningspunkt med axeln och för dess medelpunkt, så är exempelvis

$$\overline{AM} = m - a ,$$

om $m > a$, och

$$\overline{AM} = a - m ,$$

om $m < a$.

Man skulle därför kunna vänta sig, att högra membrum i ekvationen (4) skulle kunna ha värdet

$$(5) \quad \ldots \ldots \quad K = \frac{m-a}{c-a} : \frac{b-m}{b-c}$$

eller också samma värde med motsatt tecken.

Det visar sig emellertid, att man alltid vid ljusets brytning genom en skiljoyta får K positivt.

Man har således

$$(6) \quad \ldots \ldots \quad \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = \frac{a-m}{a-c} : \frac{m-b}{c-b} = K .$$

Man kan säga, att detta är själva »clouen» i föreliggande bevis. De fyra punkterna A, B, C, M kunna permuteras på den optiska axeln på

$$4 = 24$$

olika sätt. Emellertid kunna endast 16 av dessa permutioner förekomma vid ljusets brytning. Fastän jag härigenom måhända gör föreliggande bevisföring onödigt lång, skriver jag här upp dessa 16 sätt. De äro

ABMC	*AMCB*	*ACMB*	*ABCM*
MBAC	*BAMC*	*BACM*	*CBAM*
MCAB	*MABC*	*CABM*	*CMAB*
BMCA	*MCBA*	*CMBA*	*BCMA* .

I de 8 första fallen är det frågan om en konkav skiljoyta ($m < c$), i de 8 sista om en konvex. Såsom man ser, och som man lätt kan kontrollera, måste *antingen* såväl bild som föremål ligga mellan centrum och ytan *eller* ock båda två ligga utanför detta område. I alla dessa fall blir dubbelförhållandet i högre membrum av (4) lika med $+ K$.

Låt oss exempelvis betrakta fallet

$$CABM .$$

Där är

$$\overline{AM} = m - a , \quad \overline{BM} = m - b ,$$

$$\overline{AC} = a - c , \quad \overline{BC} = b - c ,$$

och således

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}} = \frac{m-a}{a-c} : \frac{m-b}{b-c} = \frac{a-m}{a-c} : \frac{b-m}{b-c} = +K.$$

Uttrycket (4) erhåller således följande allmänna analytiska form

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{a-m}{a-c} : \frac{b-m}{b-c}$$

eller

$$(7) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad n_1 \frac{a-m}{a-c} = n_2 \frac{b-m}{b-c}.$$

Vi kunna här skriva

$$a - m = a - c - (m - c),$$
$$b - m = b - c - (m - c),$$

så att (7) antar formen

$$n_1 \left(1 - \frac{m-c}{a-c}\right) = n_2 \left(1 - \frac{m-c}{b-c}\right)$$

eller

$$(8) \quad . \quad . \quad n_1 \left(\frac{1}{m-c} - \frac{1}{a-c}\right) = n_2 \left(\frac{1}{m-c} - \frac{1}{b-c}\right),$$

som vi också kunna skriva

$$(8^*) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \frac{n_2}{b-c} - \frac{n_1}{a-c} = \frac{n_2 - n_1}{m-c},$$

vilket är allmänna formen för bestämmandet av bildens läge vid ljusets gång genom en brytande yta (och vi inskränka oss till *centrala* strålar).

III. Ljusets gång genom en lins.

Låt n_1, n_2, n_3 vara i ordning brytningsindices för de tre medierna. Om a_1, b_1, c_1, m_1 äro koordinaterna för resp. föremål, bild, skiljoytans skärningspunkt med optiska axeln och för medelpunkten till den första skiljoytan, samt a_2,

b_2, c_2, m_2 motsvarande kvantiteter för den andra skiljoytan, så har man enligt (8*) ekvationerna

$$\frac{n_2}{b_1 - c_1} - \frac{n_1}{a_1 - c_1} = \frac{n_2 - n_1}{m_1 - c_1},$$

$$\frac{n_3}{b_2 - c_2} - \frac{n_2}{a_2 - c_2} = \frac{n_3 - n_2}{m_2 - c_2}.$$

Då bilden vid den första brytningen sammanfaller med föremålet i den andra brytningen, är

$$a_2 = b_1;$$

vidare kunna vi antaga, att

$$n_3 = n_1.$$

Ekvationerna antaga då följande form

$$(9) \quad \ldots \quad \begin{cases} \dfrac{n_2}{b_1 - c_1} - \dfrac{n_1}{a_1 - c_1} = \dfrac{n_2 - n_1}{m_1 - c_1}, \\ \dfrac{n_1}{b_2 - c_2} - \dfrac{n_2}{b_1 - c_2} = \dfrac{n_1 - n_2}{m_2 - c_2}. \end{cases}$$

Elimineras b_1 mellan dessa båda ekvationer, erhålles en relation mellan b_2 och a_1, som är den sökta ekvationen.

I skolundervisningen torde man knappast ha tid att behandla problemet i så allmän omfattning[1] utan får inskränka sig till oändligt tunna linser, vid vilka alltså

$$c_1 = c_2 = c.$$

Ekvationerna (9) antaga då formen

$$\frac{n_2}{b_1 - c} - \frac{n_1}{a_1 - c} = \frac{n_2 - n_1}{m_1 - c},$$

$$\frac{n_1}{b_2 - c} - \frac{n_2}{b_1 - c} = \frac{n_1 - n_2}{m_2 - c}.$$

[1] Resultatet av eliminationen är följande:

$$n_1\left(\frac{1}{b_2 - c_2} - \frac{1}{a_1 - c_1}\right) + (n_2 - n_1)\left(\frac{1}{m_2 - c_2} - \frac{1}{m_1 - c_1}\right) =$$
$$= \frac{c_2 - c_1}{n_2}\left(\frac{n_1}{a_1 - c_1} + \frac{n_2 - n_1}{m_1 - c_1}\right)\left(\frac{n_1}{b_2 - c_2} + \frac{n_2 - n_1}{m_2 - c_2}\right),$$

vilket således är linsformeln för linser med godtycklig tjocklek.

Genom addition av dessa erhålles nu

$$(10) \quad \frac{1}{b_2 - c} - \frac{1}{a_1 - c} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{m_1 - c} - \frac{1}{m_2 - c}\right),$$

som är den sökta linsformeln.

Här kan origo ligga huru som helst. Låter man origo sammanfalla med den »optiska medelpunkten» ($=C$) och stryker indices vid b_2 och a_1, fås

$$(10^*) \quad \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{m_1} - \frac{1}{m_2}\right).$$

Ex. *Bikonvex lins.* Här är

$$m_1 (= m_1 - c) = +r_1; \; m \; (= m_2 - c) = -r_2,$$

alltså

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

Ex. 2. *Bikonkav lins.* Då är

$$m_1 = -r_1; \; m_2 = +r_2,$$

alltså

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = -\frac{n_2 - n_1}{n_1}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right).$$

*

Spegelformeln.

Vi använda samma beteckningar som vid ljusets brytning. I stället för invarianten $n \sin i$ vid ljusets brytning erhålla vi här

$$i_1 = i_2$$

eller

$$\sin i_1 = \sin i_2$$

eller

$$(1) \quad \ldots \ldots \quad \sin APM = \sin BPM.$$

På samma sätt som vid brytningen härleda vi här

formlerna

$$\frac{\sin APM}{\sin AMP} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AP}},$$

$$\frac{\sin BPM}{\sin BMP} = \frac{\overline{BM}}{\overline{BP}}.$$

Emedan alltid

$$\sin AMP = \sin BMP,$$

få vi härav

$$(2) \quad \ldots \ldots \quad 1 = \frac{\overline{AM}}{\overline{AP}} : \frac{\overline{BM}}{\overline{BP}}.$$

Betraktas endast *centrala* strålar, är

$$\overline{AP} = \overline{AC},$$

$$\overline{BP} = \overline{BC},$$

och således

$$(3) \quad \ldots \ldots \quad 1 = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} : \frac{\overline{BM}}{\overline{BC}}.$$

Det är som vi se samma formel som vid ljusets brytning, om vi i formeln (4) (föreg. uppsats) sätta $n_1 = n_2$.

Det analytiska uttrycket för dubbelförhållandet i (3) har emellertid nu värdet

$$-\frac{a-m}{a-c} : \frac{b-m}{b-c} = -K,$$

alltså detsamma som för brytning med *motsatt tecken*. Vid ljusets reflexion är det nämligen så att *antingen* bilden *eller* föremålet, men ej båda två, måste falla mellan M och C. Följaktligen kunna här följande åtta permutationer förekomma

$$AMBC \quad ACBM$$

$$MACB \quad CAMB$$

$$BMAC \quad BCAM$$

$$MBCA \quad MBCA.$$

I alla dessa 8 fall erhåller dubbelförhållandet värdet $-K$. Spegelformeln blir alltså

$$-1=\frac{a-m}{a-c}:\frac{b-m}{b-c}$$

eller

$$-\frac{b-m}{b-c}=\frac{a-m}{a-c}$$

eller

$$-1+\frac{m-c}{b-c}=1-\frac{m-c}{a-c}$$

eller

$$-\frac{1}{m-c}+\frac{1}{b-c}=\frac{1}{m-c}-\frac{1}{a-c}$$

eller

$$\frac{1}{b-c}+\frac{1}{a-c}=\frac{2}{m-c}.$$

Tas spegelytans skärning med axeln till origo, erhålles formeln

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{2}{m},$$

som således är allmänna formeln för speglar, då endast centrala strålar tagas i betraktande.

Ex. 1. *Konvex spegel.*

Här är $m=m-c=+r,$

alltså

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=+\frac{2}{r}.$$

Ex. 2. *Konkav spegel.*

$$m=m-c=-r,$$

alltså

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{2}{r}.$$

Tonfrekvenstelegrafi.

Av OTTO GALLANDER.

Växelström tränger ut likström på det ena området efter det andra. Ett nytt område, som nu håller på att erövras av växelströmmen, är telegrafen.

Anledningarna till att växelström bättre lämpar sig vid telegrafering än likström äro, dels att snabbheten vid telegrafering med likström ej kan bliva synnerligen stor på grund av laddningsfenomenen, dels att de erforderliga överdragen (reläen) kräva mycken tillsyn. Genom att använda växelström av en styrka och frekvens av samma storleksordning som telefonströmmarna undvikas dessa svårigheter. I elektronrören har man synnerligen lättskötta medel att efter behag förstärka mycket svaga växelströmsimpulser vid mottagningsstationen. Vidare kan man på samma tråd sända flera telegram på samma gång. Man behöver då blott ha olika frekvens för de olika sändarna och vid mottagningsstationen inmontera sådana filter, som användas på radioapparater för att ställa in på en viss avsändningsstation.

Som bekant beräknas det skenbara motståndet (impedansen) ur formeln $Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$, då R är trådens motstånd mätt i ohm, L dess induktans mätt i henry, C dess kapacitet mätt i farad samt $\omega = 1\pi\nu$, där ν är frekvensen. För att få impedansen liten kopplar man in spolar på vissa avstånd från varandra (pupinisering av kabeln).[1]

[1] Den som intresserar sig för, hur dessa avstånd och spolarnas induktans beräknas, hänvisas till tvenne uppsatser av byrådirektör Holmgren i Tekniska meddelanden från Telegrafstyrelsen, 1923 n:r 3 och 1924 n:r 6 och 7.

Av den nyss anförda formeln framgår, att impedansen för en viss ledning genom riktig pupinisering kan bliva ett minimum endast för en viss frekvens. Ledningen är dock användbar för frekvenser, som ligga långt från den gynsammaste frekvensen. Man kan vid pupiniserade kabellinjer ej använda mycket höga periodtal. Den s. k. gränsfrekvensen, över vilken dämpningen stiger till mycket höga värden, är härvid avgörande. Vid rikskabeln Stockholm—Göteborg är denna frekvens c:a 2 400 perioder.

Även en undre gräns för den användbara frekvensen finnes. Detta beror därpå, att vid mottagaren tillräckligt många perioder måste komma på ett telegrafiecken, för att detsamma skall återgivas tydligt och säkert.

Intervallen mellan de frekvenser, som användas för telegram på samma tråd, måste vara rätt stora, för att man ej skall få för stora förluster i de filter, som vid mottagningsstationen särskilja de olika frekvenserna. Av det sagda framgår, att endast ett begränsat antal telegram kunna samtidigt sändas på samma tråd. Det i vårt land använda systemet vid telegrafering med växelström medger 6 à 8 samtidiga telegram på en tråd.

Sändareanordningen är enkel för den, som något sysslat med radioapparater.

De olika bärfrekvenserna alstras i var sin rörgenerator med återkoppling mellan anod- och gallerkrets. I varje rörs anodkrets ingå en fast kondensator och en variabel induktans, vilken senare samtidigt tjänstgör som återkopplingstransformator. Denna transformator är utrustad med förskjutbar järnkärna, vilket möjliggör en reglering av induktansen och därmed även av periodtalet. I samma transformator ingår en tredje lindning för uttag av växelströmmen, som via ett telegrafrelä slutes genom en spänningsdelare, ansluten till gallerkretsen i den för sändarna gemensamma förstärkaren. Samtliga spänningsuttag från de olika generatorerna äro seriekopplade till förstärkarens gallerkrets. Denna hopkoppling av de olika kretsarna är synnerligen värdefull ur störningssynpunkt.

På mottagningsstationen är telegraflinjen via en transformator ansluten till en ändförstärkare, efter vilken »frekvensfilter» avpassade för de olika frekvenserna äro parallellt inkopplade. Sedan varje frekvens passerat sitt filter, likriktas växelströmmen genom likriktarrör, ett för varje frekvens. Varje likriktares anodkrets är ansluten till ena lindningen av en transformator, som parallellkopplats med en kondensator. Transformatorns andra lindning är direkt kopplad till lindningen av ett polariserat mottagningsrelä, som sedan fortplantar telegrafteckнen till en lokal likströms-telegrafanordning av vanlig typ.

En fylligare behandling av tonfrekvenstelegrafi har givits av civilingenjör K. Hj. Andersson i Tekniska meddelanden från Telegrafstyrelsen 1924 n:r 6—7.

Två apparater för kemiska skolförsök.

Av KARL H. A. MELANDER.

I.

För att bestämma vattnets kvantitativa sammansättning torde man i allmänhet vid lektionsförsök oxidera vätgas med kopparoxid, och man bestämmer därvid kopparoxidens viktsförlust och den bildade vattenvikten.

Förf. har under lektioner i klass 5 och R I även använt sig av denna princip och härvid betjänat sig av en apparat, som bland annat karakteriseras därav, att kopparoxiden reduceras i ett rör, *fastsmält* vid vattenabsorptionsröret.

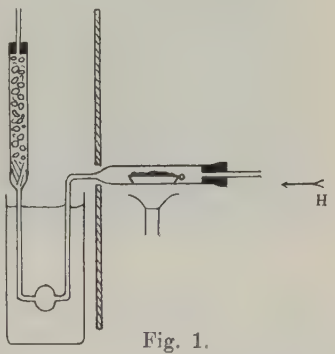


Fig. 1.

Försöksanordningen framgår av fig. 1.

Ett vägt och med utglödgad kopparoxid fyllt porslinsskepp är inskjutet i ett medelst en bunsenbrännare direkt upphettat tjockväggigt reduktionsrör av felfritt, hårdsmält glas, som är fastsmält vid ett **U**-rör, försett med en kula och ett vidare rör, innehållande litet glasull, på vilket befinner sig ett lager av vattenfritt klorkalcium.[1] Reduktions-absorptionsrörets vikt är bekant. För att få huvudmängden av det bildade vattnet samlat i kulan är **U**-röret nedsänkt i en bägare med kallt vatten, som skyddas från uppvärmning av en tjock asbestskiva. För till- och avledning av vätgasen äro respektive rör försedda

[1] Reduktions-absorptionsröret förfärdigas bäst av genomskinlig kvarts.

med felfria korkar, genomdragna av glasrör. Avledningsröret står medelst en gummislang i förbindelse med ett klorkalciumrör, som skyddar mot luftens fuktighet.

Vätgasen framställes bäst elektrolytiskt, men man kan även utan risk att misslyckas betjäna sig av väte, framställt i Kipps apparat ur utsp. svavelsyra och zink. Såväl svavelsyran som zinken skola dock vara arsenikfria. Vätet torkas med konc. svavelsyra.

Vid vägningarna iakttages, att man alltid väger reduktions-absorptionsröret luftfyllt. Man bör sålunda efter kopparns avlägsnande ur reduktionsröret suga torkad och kolsyrefri luft genom rörsystemet.

Här må anföras de värden, som erhållits enligt beskrivna metod.

	I.	II.	III.	IV.	
R.A.-rör + H_2O	45,4687	45,6134	45,6890	44,7602	gr
R.A.-rör	45,2022	45,3670	45,5441	44,5448	»
H_2O	0,2665	0,2464	0,1449	0,2144	»
Skepp + CuO	3,2999	3,5670	3,4095	3,2236	»
Skepp + Cu	3,0647	3,3500	3,2800	3,0334	»
O	0,2352	0,2170	0,1295	0,1902	»

% syre

I.	88,26	Medelt. 88,60.
II.	88,07	
III.	89,37	
IV.	88,71	

Enligt Dumas och Stas innehåller vatten 88,864 % syre.

*

II.

Vid genomgång av ozon bör man åtminstone visa eleverna, att reaktionen $3O_2 = 2O_3$ sker under volymminskning,

och att jod frigöres ur jodkalium. Dessutom bör man naturligtvis lära dem igenkänna ozonens karakteristiska lukt.

Fördenskull har konstruerats en ozonapparat, vars princip framgår av figurerna 2 och 3.

Från en gasometer ledes syre genom en tvättflaska, innehållande konc. svavelsyra, och därifrån till ozonapparaten. Denna består av ett inre rör *A*, fyllt med kvicksilver, som står i ledande förbindelse med den ena sekundärpolen till ett induktorium. Detta inre rör är förmedelst en gummipropp *B* fastsatt i ett vidare yttre rör *C*,

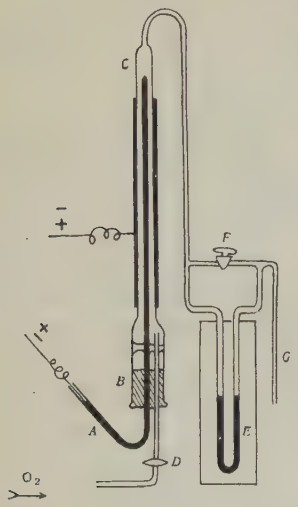


Fig. 2.

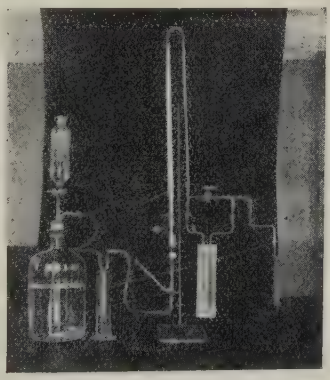


Fig 3.

som på utsidan är beklätt med stanniol, vilken står i ledande förbindelse med induktoriets andra sekundärpol. För att skydda gummiproppen och för att ytterligare torka gasen finnes ovanpå proppen ett lager kvicksilver och ovanpå detta ett lager konc. svavelsyra. Genom gummiproppen går dessutom ett tilledningsrör, försett med en kran *D*. Det yttre röret står på sätt som figurerna visa i förbindelse med svavelsyre-vakuummetern *E*, försedd med millimeterskala. Vidare märkes kranen *F*. Slutligen uttages det ozonblandade syret genom ett avledningsrör *G*.

Vill man påvisa, att ozonbildningen sker under volymminskning, så fylles apparaten med syre. Under fyllningen

äro tydligen kranarna *D* och *F* öppna, och vakuummetern visar icke någon tryckskillnad. Därefter slutas kranarna *D* och *F*, och induktoriet sättes i verksamhet under några minuter. Efter strömmens avbrott väntar man åtminstone 5 minuter, så att temperaturen hinner att jämna ut sig. Därefter avläses vakuummetern. Denna visar nu ett undertryck i ozonapparaten, av vars storlek man även kan beräkna ozonhalten.

Under förutsättning, att reaktionsvolymen hålles konstant, härledes lätt, att

$$\text{vikts \% ozon} = \frac{300 \cdot 1{,}9 \cdot l}{13{,}6 \cdot L},$$

där l är det antal mm svavelsyra, som avlästs, och där L är barometerståndet i mm kvicksilver.

Vid ett försök erhölls $l = 50$ mm och $L = 731$ mm. Härav beräknas vikts-% ozon $= 2{,}9$.

(Ovan beskrivna apparater tillverkas av firman Rudolph Grave, Stockholm.)

Eksjö i januari 1926.

De nya fysiska och kemiska institutionerna vid Högre reallläroverket å Norrmalm i Stockholm.[1]

Genom beslut av Stockholms stadsfullmäktige vid sammanträdet den 18 december 1922 anvisades till ändrings- och nyinredningsarbeten inom den åt Högre reallläroverket på Norrmalm upplåtna huvudbyggnaden 213 000 kronor samt till nyanskaffning av inventarier för de nyanordnade lokalerna 30 000 kronor.

Under omkring 20 år har läroverket fått vänta på en definitiv lösning av sin byggnadsfråga, ägnad att bereda ökat utrymme åt dess under årens lopp mer och mer vidgade verksamhet. En mångfald olika förslag ha förelegat till behandling, dels förberedelsevis inom läroverkskollegiet, dels inom respektive myndigheter, men ha av olika skäl blivit bordlagda.

Vad som under en avsevärd följd av år hämmade alla utvidgningsplaner, var det i skrivelser och underhandlingar kraftigt betonade tryckta ekonomiska läget inom landet i dess helhet och inte minst inom stadskommunerna.

Svårigheten att i trånga, otidsenliga och otillräckliga lokaler bedriva en undervisning efter den nya läroverksstadgans fordringar, ävensom uttalanden gjorda vid två på varandra följande inspektioner framtvungo slutligen det förslag, som nu blivit lyckligen genomfört.

Ändringsarbetena, som påbörjades omedelbart efter årsavslutningen 1923, koncentrerades under det årets sommarferier till vindsvåningen, dit nya undervisningslokaler m. m. skulle förläggas. Takfönster togos upp, mellanväggar restes. Golvet till vindsvåningen bröts igenom för de nya ventilationskanalerna och för ledningar av olika slag.

[1] Utdrag ur läroverkets årsredogörelse 1924—25.

Under läsåret 1923—24 fortsattes samma inredningsarbeten, vartill kom putsning och målning m. m. Därigenom att byggnadsställningar blivit resta kring byggnadens södra del kunde i regel all samfärdsel, alla transporter m. m. till och från arbetsplatsen på vinden ske utifrån, så att undervisningen kunde på det hela taget fortgå ostörd.

Efter påsklovet 1924 kunde all kemiundervisning förläggas till de nya institutionslokalerna i vindsvåningens södra del.

Under sommarferierna 1924 igångsattes nyinredningsarbetena, inom det lokalutrymme, som blivit disponibelt i våningen 2 tr. upp genom flyttningen av den biologiska och den kemiska institutionen. Dessa arbeten voro ej avslutade vid det nya läsårets början. En följd därav var, att de första veckorna av höstterminen 1924 fysikundervisningen måste försiggå i klassrummen. Mot slutet av september månad var nyinredningen praktiskt taget avslutad.

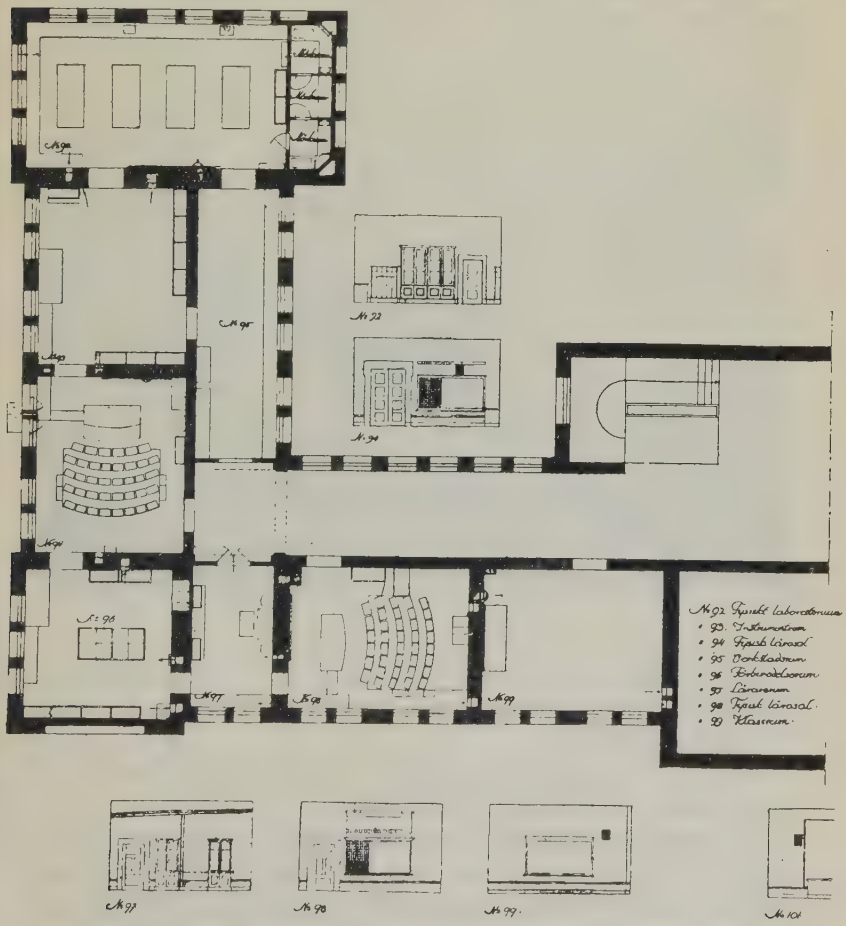
Den fysiska institutionen.

Den fysiska institutionens ökade möjligheter att väl tillgodose fysikundervisningens krav framgår redan därav, att hela det utrymme, som förut disponerades för fysik och kemi, med undantag av en till klassrum nu inredd lärosal, numera tages i anspråk enbart för undervisning i sistnämnda ämne.

Genom denna nyinredning har först och främst vunnits ett rymligt och ljust laboratorierum, f. d. kemiska laboratoriet. Utefter ena kortväggen har här avskilts ett smalt rum, som genom två tvärväggar avdelats i tre mörkrum. Det korridorliknande rum, där de fysiska laborationerna förut bedrevos, är numera verkstadsrum med hyvelbänk, verktyg och tillbehör.

I laboratoriet finnas 4 stora golvfasta bord för 8 laborantgrupper. Varje grupps arbetsplats angives genom gruppens nummer, som målats på bordet. Realskolans laborationsavdelningar måste delas i 10 grupper, och grupperna 9 och

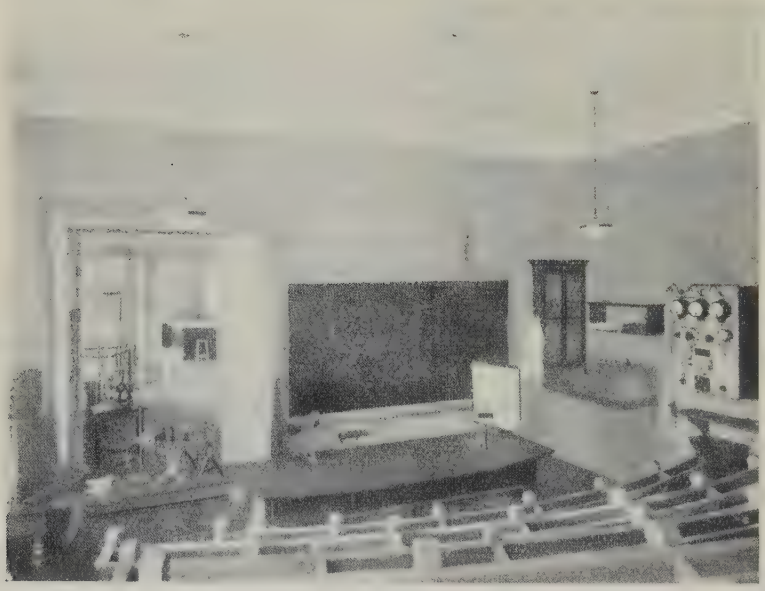
10 ha sina arbetsplatser vid ett smalare långbord utefter ytterväggarna. Till var och en av de 10 arbetsplatserna höra 2 rymliga skåp i resp. bord, där en uppsättning av de vanliga laborationsutensilierna förvaras, såsom glaskärl, våg, viktsats, sladdar o. s. v. Stativ, klämmare, kokställ, brännare och verktyg förvaras i öppna numrerade fack i två vid mörkrumsväggen stående hyllor. Ömtåliga instrument, lösningar o. d. förvaras i två större skåp. Småsaker



Plan av den fysiska institutionen.

(kork m. m.) samt reserv av glasvaror förvaras i långbordets underskåp.

Från en hörnplats utgå dubbla elektriska ledningar till var och en av de 8 arbetsplatserna vid mittborden. Genom den ena ledningen kunna alla grupperna kopplas i serie, genom den andra parallellt. Kontakterna äro oväxelbara, och en serieproppp kan icke användas till parallelledningen



En av de fysiska lärosalarna.

eller tvärtom. Vid hörnplatsen kan man taga spänning antingen från stadsnätet genom ett motstånd eller också från ackumulatorer.

Till inredningen hör vidare en stor väggfast svart tavla med ett en meter brett rutat fält.

Numera finnas två lektionsrum disponibla, förut endast ett för fysiken ensam och ett i hälftenbruk mellan fysiken och kemien. I vartdera av dessa rum finnas 38 fasta sittplatser för eleverna. »Fysik 1» är försett med skioptikon

samt en enkel anordning för uttag av elektrisk ström för demonstrationsförsök, »fysik 2» med elektrisk väggtavla samt anordning för intag av solljus medelst en urverksheliostat. I vartdera rummet är en projektionsgalvanometer uppsatt.

Instrumentsamlingen är numera — förutom de apparater, som förvaras i laboratoriets skåp och bord — inrymd i två rum i stället för det enda rum, som förut stod till förfogande. Tack vare detta ökade utrymme har det blivit möjligt att realisera det gamla önskemålet att få arbetsbord placerade i instrumentrummen.

Då planen för dispositionen av lokalutrymmet, som ju ursprungligen var avsett att tillgodose andra ändamål, uppgjordes, befanns det lämpligast att förlägga det ena lektionsrummet, »fysik 2», mellan de båda instrumentrummen. I det mellan »fysik 2» och laboratoriet liggande instrumentrummet förvaras apparaterna för elektrodynamik, akustik och optik, d. v. s. för tredje ringens kurs. Ring III har således alltid sina lektioner i »fysik 2». All övrig materiel förvaras i det andra instrumentrummet, som ligger mellan båda lektionsrummen. Från »fysik 2» har man således kort väg till alla apparater, från »fysik 1» till alla utom till dem, som användas i ring III.

Slutligen har institutionen erhållit ett litet biblioteksrum, därigenom att den ena väggen till ett litet genomgångsrum flyttades ut över en numera obehövlig del av korridoren, som på detta sätt tillfördes detta rum.

I samband med nyinredningen har två smala järnbord, vartdera i form av ett T, uppsatts på takaltanen. De användas som astronomiska observationsbord.

Den kemiska institutionen.

Den kemiska institutionen disponerade förut över följande lokaler: en egen lärosal, en gemensamt med fysiken, ett rum för materiel, ett laboratorium. Dess nya lokaler utgöras av två lärosalar, två laboratorier, vågrum, arbets-

rum för lärare, rum för samlingar, samtidigt arbetsrum för lärare och lärarkandidater, mörkrum och toalett.

Laboratoriet n:r 1, tills vidare avsett för gymnasiet, är försett med två dubbla och ett enkelt arbetsbord, inredda med sammanlagt 40 lådor och 40 skåp samt med plats för 15 samtidigt arbetande laboranter. Borden äro försedda med gas-, vatten-, avlopps- och elektriska ledningar. Dragkapellen äro fyra, alla med gas, vatten och avlopp. I fönstervägen finnas 7 skåp för materiel.

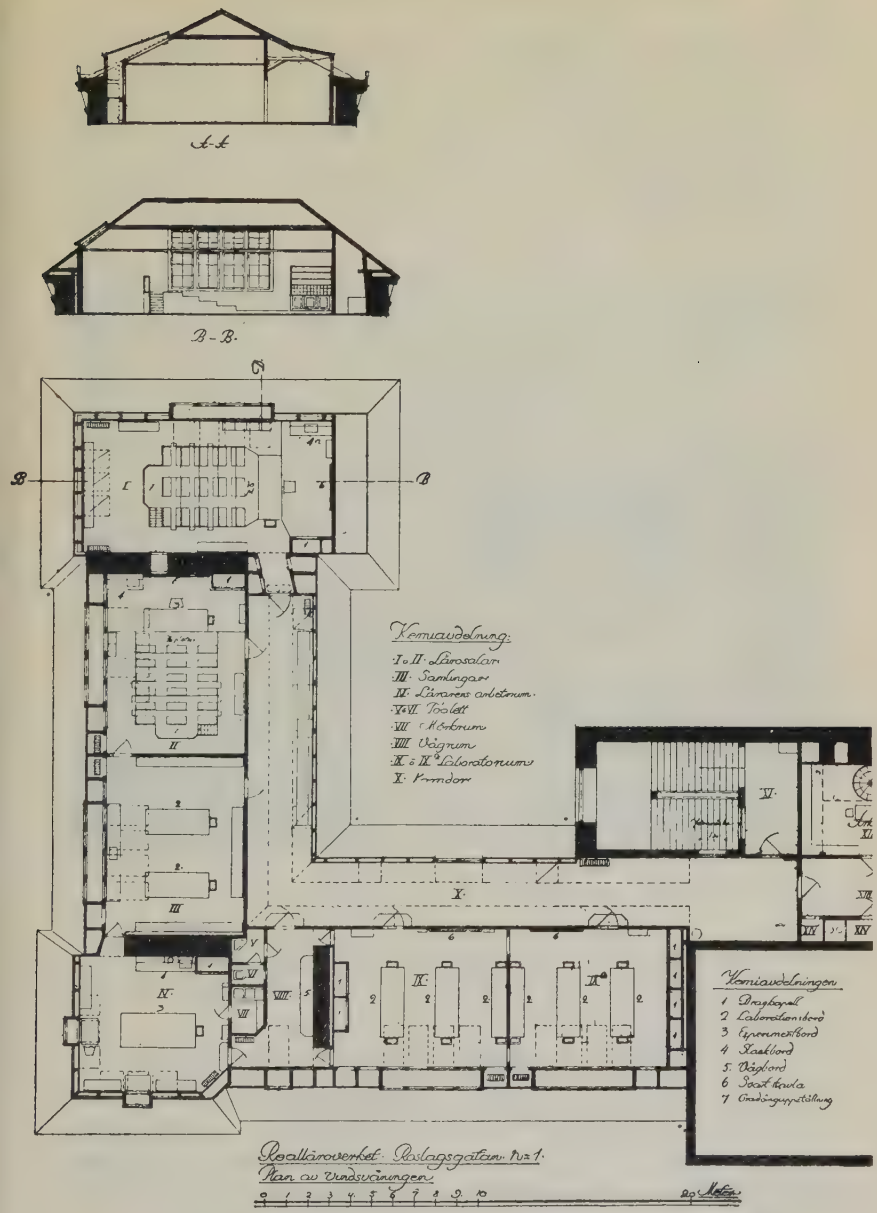
Laboratoriet n:r 2 är väsentligen inrett som n:r 1 men har endast 2 dragkapell. Det användes tills vidare av realskolan.

Från laboratoriet n:r 2 leda två dörrar till vågrummet, där de för vägningsförsök (i klass 5) avsedda vågarna äro uppställda. Med tillkomsten av detta rum har vunnits den stora fördelen, att vågarna numera ej behöva flyttas utan ha sin givna plats, skyddade för åverkan av laboratorieluften. Här förvaras också läroverkets analysvåg och en del av dess kemiska boksamling.

En stor vinst betyder inredandet av ett särskilt arbetsrum för lärarna, som för lektionsförberedelser och andra arbeten tidigare endast haft lärosalen att tillgå. Inredningen utgöres av ett stort arbetsbord med gas, vatten, avlopp och elektrisk ström, kapell, skåp för lärare, ävensom för finare apparater.

Med hänsyn till de lärarkandidater i kemi, som läroverket årligen utbildar, har även rummet för samlingar utrustats med två på vanligt sätt inredda arbetsbord. Dessutom finnas här tre stora skåp för preparat och utensilier och två väggfasta bänkar med underskåp. I detta rum förvaras läroverkets kemiska handbibliotek. Mineral- och bergartsmontern, som förut var uppställd i den för kemimaterielen upplåtna salen, har nu, efter klyvning på längden, placerats i korridoren utanför den nuvarande institutionen.

Lärosalen n:r 1, avsedd för realskolan och gymnasiets nedre ringar, har 36 amfiteatraliskt ordnade sittplatser,



Plan av den kemiska institutionen.

föreläsningsbord, dragkapell, två hyllor för reagens, skåp för utensilier, ställning för skioptikonapparat m. m.

Lärosalen n:r 2, avsedd för gymnasiets högre ringar, har 30 på samma sätt ordnade platser, föreläsningsbord, dragkapell, två hyllor för reagens, två skåp för utensilier, ett skåp för tekniska samlingar, ställning för skioptikon m. m.

Rum för den kemiska samlingen.

Belysningen är i alla större rum halvindirekt. Över varje arbetsbord i laboratorier och arbetsrum äro dessutom placerade två hissbara pendlar.

En i byggnadens mittparti placerad elektrisk fläkt står i förbindelse med samtliga rum genom kapellen, där sådana finnas, och evakuerar dem ytterst effektivt. Även föreläsningsborden äro försedda med uttagningskanaler, varigenom försök med illaluktande gaser utan obehag kunna utföras på bordet, om fläkten igångsättes.

Golvbeläggningen är i lärosalarna ekstav, i alla andra rum asfalt, i korridoren cementmosaikplattor.

Vindsvåningens fönster äro anordnade dubbla med en yttre och en inre del. Yttre delen består av på yttertaket uppbyggda låga kupor, i vilkas nedre vertikala yta äro insatta från rummen öppningsbara ventilationsfönster. Kupans takyta utgöres av fasta takfönster i vinkeljärnsramar. Inre delen är likaledes utförd med vertikala öppningsbara fönster och i innertakets yta placerade takfönster. De inre fönstren äro försedda med råglas.

Äldre och nyare läroböcker i fysik för gymnasiet.

Av BENKT SÖDERBORG.

Bland de minnen, som jag har från fysiklektionerna under min skolpojkstid, är ordet »udposstt», stavat med två s och två t. Det är bildat av begynnelsebokstäverna i orden utsträckning, delbarhet, porositet, ogenomtränglighet, sammantrycklighet, spänstighet, tröghet, tyngd. Minnet väcktes till liv, när jag för en tid sedan satte mig att läsa »Fysikens första grunder, till elementarläroverkens tjenst utgifne af Manfr. M. Floderus», 4:e omarbetade uppl. (1886). Boken innehåller tre delar. Den första (157 sid.) inledes med en redogörelse för naturvetenskapens omfång och indelning samt kropparnas allmänna egenskaper, varvid »kropp» naturligtvis definieras: »Kropp kalla vi allt, som intager ett rum.» Denna del omfattar mekaniken och behandlar i ordning geo-, hydro- och aerostatik, geodynamik samt i ett par kortare kapitel hydro- och aerodynamik. Den andra delen (142 sid.) handlar om ljudet och ljuset, och den tredje (205 sid.) om magnetism och elektricitet samt värmet. Inga räkneexempel förekomma i boken. Jag skall i korthet giva ett par prov på framställningens art.

I vågrörelseläran gives en schematisk framställning av de olika slagen av vågrörelse med några teckningar, men någon anvisning på en anordning, med vilken vågrörelser skulle kunna studeras, finnes icke. »För vinnande av bättre översikt vid studiet av vågrörelse i allmänhet har man indelat de i oskillerande rörelse stadda kropparna i: 1:o linjeformiga (såsom stavar och stänger), hos vilka en av dimensionerna äro övervägande; 2.o skivformiga (såsom

skivor och membraner), hos vilka tvenne av dimensionerna i förhållande till den tredje äro övervägande; och 3:o solida (såsom en vattenmassa och den atmosfäriska luften), hos vilka ingen av dimensionerna är betydligt övervägande.» Luftsvängningarna i en pipa åskådliggöras »bildlikt» i två teckningar av transversella vågor, och med hjälp av dessa, men utan hänvisning till någon apparat, redogöres för uppkomsten av bukar och noder.

I början av värmeläran redogöres för olika betydelser av ordet värme. »Vi tala således om värme i tre olika betydelser, dels såsom ett särskilt slag av förnimmelser, dels såsom ett visst tillstånd hos kropparna (s. k. absorberat värme), dels såsom strålande värme.» Strålande värme är liksom ljuset »intet annat än vågrörelse i etern, varvid eterns partiklar oskillera i transversella banor». Att värmestrålar absorberas, »kan ej betyda annat än att eterrörelsen utifrån strävar att sätta etern inom kroppen i vibrationer, men dessa hämmas av kroppen». Eftersom rörelseenergien är oförstörbar och eterrörelsen i kroppen hämmas av molekylerna, så måste »den rörelsemängd, som etern förlorat, upptagas av kroppens molekyler», och ju starkare den inre etern påverkas, »i desto större banor måste kroppens molekyler komma att svänga, och desto större hastighet uppnå de i sina banor. — — — Då vi icke känna någon kropp, som är absolut kall, måste hos alla kroppar molekylerna befinna sig i en oskillerande rörelse, vilken omständighet utgör en tillräcklig förklaringsgrund för porositeten såsom en allmän egenskap hos kropparna».

Formen av en vätskas fria yta såsom en följd av smådelarnas lättrörlighet bestämmes på följande sätt. »Då en vätska befinner sig i jämvikt, är dess fria yta i varje punkt vinkelrät mot resultanten till de där verkande krafterna. Ty om så icke vore förhållandet, utan abc (a, b och c äro tre punkter på en vätskeyta, som är tecknad skarpt konvex) vore ytan av en i jämvikt varande vätska och denna yta i en punkt b icke vore vinkelrät mot resultanten bd

till de här verkande krafterna, så skulle nämnda kraft kunna uppdelas i tvenne sidokrafter, av vilka den ena vore vinkelrät mot vätskans yta och således upphävdes av de underliggande partiklarnas motstånd, den andra parallell med ytan, vilken kraft icke vore motverkad, utan komme att försätta partiklarna i rörelse. Detta åter strider emot vårt antagande, att vätskan var i jämvikt. Därför kan ytan icke vara annat än vinkelrät mot resultanten till de verkande krafterna, ty i varje annat läge kan denna sistnämnda, på sätt här ovan är visat, uppdelas i komposanter.» En i rymden fritt svävande vätska måste således antaga sfärisk form.

Teckningar av apparater och redogörelser för försök finnas visserligen, men deras uppgift är mera att verifiera en given lag eller teori än att bilda kärnan i och utgångspunkten för ett studium. Floderus' framställning av »fysikens första grunder» är ett teoretiskt betonat vetenskapligt kompendium, där den sirligt logiska formen är en huvudsak.

*

När Tom Moll för nu mer än 25 år sedan utgav sin lärobok i fysik, så erövrade han fullständigt och i ett slag de skolor, för vilka hans bok var avsedd. Frågar man sig efter anledningen härtill, så blir svaret, att för Moll var företeelsen huvudsak, icke teorien, och att han i sin framställning såg företeelsen med *elevens* ögon och talade dennes språk. Han hade en säker uppfattning av vad en normal pojke kan förstå och rättade sin framställning därefter. Teoretikerna ha en underbar förmåga att tänka abstrakt, och det kan vara svårt för vanliga dödliga att fatta det verkliga innehållet i den abstrakta dräkten, även när denna icke utgöres av differentialekvationer. När någon t. ex. talar om »det ändliga och krökta rummet», så måste jag för min del, och jag tänker många med mig, taga ett hövligt men bestämt farväl och säga, att i min begrepps- och föreställningsvärld finnes absolut intet, som låter uttrycka sig med

denna ordsammanställning. Men en elev i gymnasiets första och andra ring har mindre förmåga av abstraktion än vanliga dödliga. Han tar farväl långt tidigare. Han har svårt att uttrycka sig, men kunde han göra det, skulle han säga precis vad ingen mindre än lord Kelvin sagt om sig själv: »Jag är aldrig fullt belåten, förrän jag kan åstadkomma en mekanisk modell av en sak. Kan jag göra det, så kan jag förstå saken. Förrän jag kan alltigenom utföra modeller, förstår jag inte.» Molls böcker innehålla rikligt med experimentella anvisningar, för att eleven skall lära känna fenomenet självt och inte bara en beskrivning av detsamma. Han utgår icke från en generell lag för att sedan låta ett fenomen bliva exempel på denna lag, utan han gör först eleven förtrogen med de särskilda fenomenen och sedan med den allmänna lagen. Hans mål är icke att på genvägar nå fram till ett »resultat», således icke att »med tidsvinst» undanstöka en viss examenskurs. I en undervisning, där experimentet är det grundläggande momentet, skola eleverna lära känna de viktigaste fysiska företeelserna och deras användning i det praktiska livet. Undervisningen skall väcka deras intresse och öva deras iakttagelse- och kombinationsförmåga. En viktig del av hans böcker äro de utmärkta, väl avvägda exemplen. Karakteristisk för hans arbeten är också den nära nog absoluta pålitligheten av hans bevisföring och sakuppgifter.

Moll disponerade således sin framställning ur *fysikalisk och pedagogisk* synpunkt. Huru grundligt han genomtänkte sin plan och huru konsekvent han utformade den, får man klart för sig, när man söker bryta ut en sak ur det sammanhang, som han ställt in den i. Men det är givet, att någon allmängiltig regel icke kan ges härvidlag, ty olika lärarindividualiteter trivas icke med samma detaljerade plan för undervisningen. I geostatiken inleder Moll läran om de enkla maskinerna med ett kort kapitel om mekaniskt arbete och effekt. Jag tror det är fördelaktigare att låta arbetsbegreppet framgå ur behandlingen av de enkla maskinerna, där det visar sig, att en storhet, pro-

dukten av dragande kraft och väg, alltid blir oförändrad. Första ringens geostatik bör omfatta kraftparallellogrammen, tyngdpunkten och de enkla maskinerna. De teoretiska deduktionerna här anser jag ha ringa värde. I överensstämmelse med undervisningsplanen innehåller lärobokens första del en kort kurs i dynamik. Då det gäller reallinjen, måste jag säga, att den tid, som användes till denna kurs, är illa använd. Den kan med ojämförligt mycket större utbyte användas till astronomi. Dynamiken hör hemma i 4:e ringen, och jag har aldrig ägnat den en timme i 1:a ringen.

Väderlekskläran är uppdelad på statiken och värmeläran. Denna uppdelning är gjord med hänsyn till 1:a ringens kurs i geografi. Många lärare torde helst vilja ta allt i ett sammanhang på värmeläran. I värmeläran är kalorimetrien något splittrad och tages i sin helhet rätt sent, ett förhållande, som Rudberg ändrat till det bättre i den sista upplagan. Kalorimetrien upptages där omedelbart efter utvidgningsläran.

I dynamiken har Moll icke låtit energiprincipen komma fullt till sin rätt. Även detta förhållande har Rudberg förbättrat genom att på olika områden införa några lämpliga problem, som enkelt lösas med användande av energiprincipen. Deduktionen av centripetalkraften vid likformig rörelse i cirkulär bana kan göras skarpt och enkelt genom hastighetens uppdelning efter axlarna och användande av derivatbegreppet. Här få eleverna en användning även i fysiken av andra derivatan. Centrifugalkraften är oklart framställd. I paragraf 83 sägs, att någon kraft, som verkar utåt från medelpunkten, icke existerar, men i paragraf 84 talas om den kraft, som verkar på snörets fästpunkt i riktning utåt. I själva verket är det ju så, att en centripetalkraft verkar på den kropp, som utför rörelsen, och en centrifugalkraft på den kropp, som framtvingar rörelsen.

En del av Molls fysik står på ett avgjort lägre plan än de övriga, och det är elektricitetsläran. Visserligen märker man också här på många håll mästaren, men på detta område gick utvecklingen förbi Moll. Hans framställning

av elektromagnetismen och induktionselektriciteten är ett lappverk. Ringankaret har fått allt utrymme, trumankaret intet. Han talar om polarisationsström och extraström, där några sådana strömmar icke existera och där man i stället endast har att påvisa elektromotoriska krafter. Potentialbegreppet, som är ett av de svåraste i skolfysiken, försöker han att kringgå och hjälper sig fram med analogier (temperatur, tryck, nivåskillnad), men därigenom blir det en klyfta mellan de i elektrostatiken givna grundbegreppen och elektrodynamiken, där potentialdifferens definieras genom proportionalitet mot strömstyrkan.

*

Efter Molls död har Ture Rudberg mottagit hans uppdrag att redigera de nya upplagorna. Det är tydligt, att Rudberg utför detta arbete med pietet och förståelse för Molls verk. Fyra delar ha hittills utkommit i ny upplaga. De små förändringar, som införts, äro genomgående till det bättre. Utom vad som ovan nämnts därom, skiljer Rudberg i statiken på vikt och tyngd och har i optiken bl. a. gjort en välbehövlig komplettering av teckningarna till kikaren. Men i en punkt vill jag opponera mig, och det är rörande kapitlet kraft och massa i dynamiken. Från statiken ha vi enheter för massa (kg) och kraft (kgf). Det är då onödigt att införa andra definitioner på dessa begrepp i dynamiken för att sedan uppvisa definitionernas överensstämmelse. Det är i själva verket icke någon realdefinition på kraft att säga, att den är orsak till ändring i en kropps rörelsetillstånd. Realiter innehåller denna sats snarare trögheтsbegreppet. Det synes mig naturligare att till den fallmaskin, med vilken man visar den likformigt accelererade rörelsen, ställa de två frågorna: på vad sätt beror accelerationen av den dragande kraften och av massan hos det påverkade systemet? Här kan man sedan definiera ett nytt massmått. Och jag saknar de tre Mollska raderna, som förekomma på ett par ställen i hans fysik: om massan 1

påverkas av kraften 1 kg, så blir accelerationen 1 $^{m}/_{sek^2}$ etc. Ty jag tror, att dessa rader osvikligt ge klarhet åt de säkerligen icke så få gymnasister, för vilka »proportionalitetskonstanten» icke är en så alldeles genomskinlig storhet.

Men på en del vänta vi alltjämt och med stigande iver, och det är just den del, som verkligen behövde en grundligare omarbetning, nämligen elektricitetsläran. Det lär emellertid icke dröja så länge, innan den kommer.

*

Den otillfredsställande behandlingen av elektricitetsläran i Molls lärobok torde vara närmaste anledningen till den ganska rika läroboklitteratur i fysik, som vi de senaste åren sett framträda. Här vill jag då först omnämna ett par små häften av E. Sundberg. I det första häftet (19 sid., tryckt som bilaga till Falulläroverkets årsredogörelse 1916—17) behandlas »Den elektriska potentialen, Ohmska och Jouleska lagarna». Det andra häftet (39 sid., bilaga till årsredogörelsen 1918—19) innehåller »Stycken ur elektricitetsläran» och behandlar elektrolys, elektromagnetism, induktionselektricitet, elektriska strömmar i gaser och elektromagnetiska vågor. Dessa häften äro icke någon lärobok i vanlig mening, men i en utomordentligt klar framställning, där elektrodynamiken blir en naturlig fortsättning av elektrostatiken, och med värdefulla experimentella anvisningar giver Sundberg här kontentan av hela elektricitetsläran så när som på växelströmsläran. Det skulle vara av stort värde för fysiklärarna och fysikundervisningen, om dessa häften gjordes tillgängliga i bokhandeln, helst kompletterade med en motsvarande framställning av växelströmslärans elementer.

År 1917 utgav Otto Gallander sin »Elementär elektricitetslära» (3:e uppl. 1925) och två år senare »Elementär värmelära» (2:a uppl. 1923). Hans framställning har genomgående en praktisk syftning. Förståelse av teknikens maskiner och landvinningar är fysikundervisningens mål. I elektricitets-

läran blir således växelströmsläran huvudsak. Den upptar i det närmaste en fjärdedel av boken. Och på induktionselektriciteten lämnas en kvantitativ behandling av magnetismen. Frågan om kursernas innehåll och omfång måste givetvis ställa sig olika för de tekniska läroverken och de allmänna läroverken. Vid de senare är det omöjligt att medhinnna den kurs, som Gallander upptar i sitt gedigna arbete, utan att göra avsevärda beskärningar. Det som gör, att jag för min del måste ställa mig reserverad mot boken såsom lärobok, är emellertid det sätt, varpå Gallander inför de elektriska grundbegreppen. Utgående från Örsteds försök säger G.: »Orsaken till att nålen gör nämnda utslag, kallas elektrisk ström.» Strömstyrkan mätes sedan elektrolytiskt. Potentialdifferens definieras såsom »orsak till elektrisk ström» och mätes genom proportionalitet mot strömstyrkan. Elektricitetsmängd är produkten av strömstyrka och tid. Logiskt oantastlig, blir dock denna kedja för eleven en rad abstraktioner, där det ena kort och gott är »orsak» till det andra. Helt annorlunda måste det te sig, om han i elektrostatiken fått göra bekantskap med påtagliga elektriska laddningar och deras fundamentala egenskaper att attrahera eller repellera varandra och därigenom alstra ett kraftfält. Men om elektrostatiken säger Gallander i förordet till sin första upplaga: »En elektrostatik, baserad på föreställningar, som både vetenskapen och tekniken övergivit, torde vara mera till skada än gagn.» Denna sats förstår jag icke. Tvärtemot G:s påstående är det ju så, att Millikan m. fl. givit begreppet elektricitetsmängd ett utomordentligt enkelt, konkret och fast innehåll. I bokens slut har G. ett med petitstil tryckt kapitel om elektrostatiken, som »är avsedd att genomgås, om tiden det medgiver». Så vitt jag förstår, måste det erbjuda minst sagt stora svårigheter för en elev att ur denna framställning erhålla klar kunskap om elektrostatiska fakta.

I värmeläran behandlar Gallander utvidgningsläran i ett sammanhang efter termometrien, och naturligtvis kan man göra så. Men då Moll i sin bok tar den fullständigare

behandlingen härav i ett särskilt kapitel i bokens slut, så tror jag, att han riktigt markerat, att här finns en svårighetsgräns, som i 2:a ringen icke bör överskridas. Ångmaskinen och förbränningsmotorerna få en relativt fyllig framställning. Ett par värdefulla diagram må också påpekas. Det ena visar, huru en legerings smältpunkt beror av sammansättningen, och det andra visar koldioxidens isotermer. I kapitlet om mekaniska värmeteorien behandlas på c:a 10 sidor Poissons lag, arbetet vid gasers tillståndsförändring och Carnots kretsprocess, områden, som det icke är möjligt att inträngа i vid de allmänna läroverken. I föregående häftet av denna tidskrift ger Gallander en »elementär» behandling av entropibegreppet (citationstecknet är av undertecknad) och avslutar sin uppsats med en framtidssyn: »Då termodynamik får plats på programmet vid våra allmänna läroverk, böra givetvis flera av entropiens egenskaper framhållas och andra användningar påpekas.» När jag tänker på mina egna fysiklektioner och på vad en medelgod gymnasist har förutsättningar för att *förstå*, så måste jag fråga mig, om icke lektor Gallanders uttalande är att uppfatta som ett skämt. Men det är nog inte så, utan det bör nog uppfattas som en i god tid kastad stridshandske. För de allmänna läroverkens del — i motsats till de tekniska läroverken — får jag då säga om den teoretiska termodynamikens satser, som Platon sade om skalderna: de böra under vördnadsbetygelser visas utanför fäderneslandets gränser.

*

C. Bergholm, Ivar J:son Malmborg och Sven Em. Ohlon börja alla sin elektricitetslära med elektrostatik. De behandla potentialbegreppet utförligare än Moll, och med anledning av deras framställning av detta svåra kapitel skulle jag vilja framföra ett par reflexioner. Alla författarna säga, att en positivt laddad kropp har positiv potential. Jag antar, att de härmed från början mena egenpotential, och så långt är det riktigt. Men när potentialen sedan relativeras till jorden, vars

potential »antages» vara noll, så sviker klarheten. Jag tror det är nödvändigt att utreda, huru det förhåller sig med jordens potential, och jag skall här våga ett försök.

Till en början bör det då fastslås, att om den elektriska potentialen är konstant inom ett område, så är den elektriska kraften där noll. Omvänt gäller, att om den elektriska kraften inom ett område är noll, så är potential*differensen* där noll, men potentialen behöver därför icke vara noll. Om en laddad konduktor införes i ett elektriskt fält, så inträder en fördelning, och konduktorn får den potential, som omgivningen har utefter den zon på konduktorn, där tätheten är noll. Om nu konduktorn skäres itu utefter denna zon, så få vi två kroppar med samma potential, men den ena har positiv och den andra negativ laddning. Jordpotentialen, som må antas ha ett normalvärde, bestämmes av att jorden eventuellt kan befinna sig i ett kosmiskt fält, vars egentliga källa då skulle vara solen, samt därav att jorden eventuellt har en egen laddning. På grund av elektricitetskällans stora avstånd i det kosmiska fältet är potentialfallet vid jorden under normala förhållanden omärkligt och likaså fältets fördelande inverkan på jorden. Och vad detta fält beträffar, möter således intet hinder för att kalla jordpotentialen noll.

Men frågan om jordens egenpotential (laddning) är en helt annan. Då vi göra två kroppar som äro isolerade från jorden, elektriska genom friktion eller på annat sätt, så blir den ena positivt och den andra negativt laddad med lika mängder. Såvitt jag förstår, äro dessa laddningar att fatta i absolut mening, d. v. s. kropparna voro förut absolut oelektriska. Vi kunna visa, att laddningarna påverka varandra enligt Coulombs lag, men denna lags elektricitetsmängder äro absoluta begrepp, och ur Coulombs lag är potentialbegreppet självt deducerat. Nu finnes en elektrisk gradient i atmosfären, vilket tyder på en negativ laddning på jorden och en positiv i atmosfären. Chwolson anger (år 1908), att det då fanns 35 olika teorier för att förklara luftelektriciteten. Huru många det finns nu, vet jag icke, men

jag förmodar, att de radioaktiva rönen snarare kommit teoriernas antal att krympa ihop än att ökas. I varje fall synes det mig tydligt, att den elektriska tätheten på jorden icke kan vara stor, och denna täthet tänka vi oss tills vidare vara lika överallt. Vore den betydande, så borde också förhållandena på jorden vara i bokstavlig mening hårresande. Den är icke så stor, att våra elektrostatiska försök påverkas märkbart därav, och vi kunna således också ur denna synpunkt beteckna jordens potential såsom noll, vilket nu är att uppfatta som en approximation. Sedan är det naturligtvis en sak för sig, att jorden icke är någon fullkomlig ledare och att jordpotentialen undergår lokala och temporära svajningar. Det är icke möjligt att fastslå något visst värde på potentialen, men man kan med stor precision mäta potentialdifferenser.

Med uttrycket positiv potential mena vi då en potential, som är högre än jordens. Positiv är här *alltid* ett relativt begrepp. Med positiv laddning mena vi positiv elektricitet, och positiv är här *aldrig* ett relativt begrepp.

Det är nu orätt att säga, som Bergholm och Malmborg, att en positivt laddad kropp har positiv potential. Ty att en kropp har positiv potential betyder endast, att positiv elektricitet strömmar från kroppen till jorden (d. v. s. elektroner från jorden till kroppen), om kroppen förbindes med jorden, och det kan mycket väl inträffa, även om kroppen har negativ laddning. Ohlon för fram jordpotentialen i en skenmanöver, vars verkliga innebörd helt enkelt icke kan tolkas annat än som en kategorisk förklaring, att jorden är absolut oelektrisk. Men på grund av samma begreppsförväxling som den nyssnämnda tillägger förf. (liksom Grimsehl): »Beteckningarna positiv och negativ elektricitet äro blott relativa enligt denna definition för potentialen.» Denna sats är icke blott oklar och förvirrande. Den är orimlig. »Att kalla en *laddning* positiv», därför att dess potential är positiv, är icke tillåtet.

I Malmborgs framställning synes det mig ha varit naturligast att börja med den paragraf, som förf. tar sist, och i

vilken han behandlar det arbete, som behöves för att ladda en konduktor. Som det nu är, kommer potentialbegreppet in tämligen oförmedlat.

För de lärare, som äro intresserade av saken, rekommenderar jag för övrigt att taga kännedom om Sundbergs ovan omnämnda framställning. Ett gott grepp är det att, som Sundberg och Bergholm göra, införa de elektriska elementen här i sammanhang med mätning av potentialdifferenser.

*

Malmborgs lärobok i magnetism och elektricitet för realgymnasiet är en diger bok på 182 sidor. (Förf. har också utgivit en mindre bok på 152 sidor för latingymnasiet.) Den största svårigheten med den tror jag förf. själv angivit i förordet, där han, medveten om dess vidlyftighet, säger, att den skall läsas med urskillning. Men det är ingen lätt sak. Det kräver stor erfarenhet på området, och det, som skall uteslutas, utgör i denna bok icke några särskilda kapitel utan är invävt i det övriga. Framställningen präglas av en strävan att göra klart, som jag stundom skulle vilja beteckna såsom mer påtaglig än effektiv. Det blir en väl stor rikedom på rubriker, moment och understrykningar och delvis upprepningar. Så giver förf. i ett moment den teoretiska definitionen på en ampère och i nästa moment en »tillämpning» i Biot-Savarts lag, som får den olyckliga formuleringen: »Kraften ökar proportionellt mot strömstyrkan och minskar omvänt proportionellt mot kvadraten på avståndet.» (I anm. 3, sid. 46, synes det här vara ett tryckfel. I stället för $\frac{1}{10}$ och 1 skall stå resp. $\frac{2\pi}{10}$ och 2π, eller också är satsen obegripligt formulerad.) I anslutning till denna anmärkning vill jag också påtala den språkliga formen i satsen: »Om en elektrisk ström ledes till två metallplattor i en lösning av en syra etc., så sönderdelas denna lösning i två delar», samt satsen »en elektrisk ström i ett magnetfält går åt det håll etc.» — I paragrafen om

Ohms lag för en sluten strömkrets giver förf. i mom. 1 med poängterande undermoment a och b och i mom. 2 formeln $I = \frac{E}{R}$, där $R = r_i + r_y$, och sedan behandlas i mom. 3 ett elements strömstyrka med formeln $I = \frac{E}{r_i + r_y}$, en direkt upprepning av föregående moment.

Bildmaterialet är synnerligen gott, ibland onödigt rikligt. Nog kunde t. ex. korkskruven (sid. 42), tgbussolen (sid. 46) och en av de två figurerna till Wheatstones brygga (sid. 68) saklöst utgå. De skematiska teckningarna av ringankare och trumankare (sid. 105) samt av trefasgeneratorn och motorn (sid. 119—120) tarva nog för de elever, som studera dessa, kompletterande upplysningar om huru lindningarna i verkligheten gå.

Vid införandet av begreppet ledningsmotstånd stöder sig författaren experimentellt på strömstyrkan i grenledningar och tager så först Ohms lag II och sedan Ohms lag I, men kastar om benämningarna d. v. s. numreringarna på dessa lagar. Jag tilltalas mest av den metod, som Ohlon här använder, där det från en elektricitetskälla (ackumulator) med oföränderlig polspänning tages ut ström genom olika ledningar, den ena efter den andra. Detta förfaringssätt är både teoretiskt och experimentellt det enklaste, och den experimentella nödlögn, som man gör sig skyldig till, då man antager polspänningen oföränderlig, får man snart tillfälle att klara upp.

På Faradays lag finner man den felaktiga formeln $p = 0{,}01044 \frac{A}{n} \cdot i \cdot t$ mg. Konstanten är som bekant $\frac{1{,}118}{107{,}88}$ d. v. s. $0{,}01036$. Här må också påpekas, att tilledningstrådarna i glödlampan numera icke göras av platina, utan av platinit (55 % Fe; 45 % Ni).

I framställningen av en strömbanas rörelse i ett magnetfält använder förf. liksom Sundberg och Gallander den naturliga och utmärkta regeln, att strömbanan pressas

från den starkare mot den svagare sidan i fältet. I kombination med Lenz' lag återkommer sedan denna regel på induktionselektriciteten.

Flera kapitel äro mycket väl skrivna. Så är t. ex. fallet med elektriska strömmätningsinstrument, induktion, likströmsmotorer, elektrisk kraftöverföring, atomteori. Boken avslutas med 13 sidor historik, där man finner porträtt av flera framstående fysici.

*

Bergholm och Ohlon giva båda en väl disponerad och klar framställning av elektricitetsläran och avgränsa stoffet med hänsyn till vad som kan medhinnas vid de allmänna läroverken. Hos Bergholm går denna begränsning för långt, så att hans framställning av de tekniska maskinerna blir rätt torftig. B. behandlar endast ringankaret och ger icke ens någon antydan om de energiomsättningar, som äga rum i motorn och generatorn. Likströmsmotorn behandlas redan på elektromagnetismen. Peltiereffekten tar B. före termoelektriciteten, en anordning, som icke lämpar sig på skolstadiet. Felaktigt definierar B. en växelströms frekvens såsom antalet perioder på 2π sek, och då förf. anger, att man av kalciumkarbid får acetylén, som kan överföras till alkohol, ättiksyra och ammoniak, så har han väl haft sina tankar också på kalkkväve, och ammoniaken har kommit i fel sällskap. Båda författarna begagna sig av lillfingerregeln.

Ohlon har resolut lämnat ringankaret ute, liksom Gallander gjort i sin sista upplaga. Som grund för framställningen av generatorer och motorer kommer då *en* slingas vridning i ett magnetfält (Siemens cylinderinduktor). Därifrån är det ett rätt stort steg till ett ordinärt trumankare, men det är givetvis önskvärt att en lärobok innehåller en beskrivning av ett sådant. Ohlon har ett par bilder av ett ankare med tre härvor. (Fig. 113, sid. 100, står såsom generator, men polbeteckningen är en motors; rotations-

riktningen är icke angiven.) Jag skulle föredraga en teckning av den vanliga typen med 6 eller 8 härvor. Den välbekanta fig. 126, sid. 109, föreställande en enfasgenerator, har icke någon motsvarighet i verkligheten, som påpekats i denna tidskrift av lektor Zachrisson (marshäftet 1924). Den schematiska teckningen sid. 111, visande en tvåpolig trefasgenerator med motor, är bra. Det vore önskvärt, att den kompletterades med en bild, som visade huru lindningarna verkligen gå vid en flerpolig maskin.

I början av växelströmsläran (sid. 105) har Ohlon ett stycke om vinkelhastighet, period och periodtal, som sedan icke får någon användning. Förf. kunde i stället gärna ha bevisat, att växelströmmens effektiva värde är lika med dess maximala, dividerad med $\sqrt{2}$, och att effekten är produkten av strömstyrkans och spänningens effektiva värden och $\cos \varphi$. För dessa bevis behövas varken vinkelhastighet eller radianer, endast vanliga vridningsvinklar, och bevisen äro blott enkla tillämpningar av formler, som eleverna känna från trigonometrien. Så långt skulle jag för min del vilja gå i fråga om växelströmmens »teori».

Med anledning av en av förf:s experimentella anvisningar vill jag omnämna en egendomlighet. Då det är fråga om att mäta det galvaniska elementets polspänning, säger förf. (sid. 37): »Utslaget är lika stort, vare sig koppar- eller zinkskivan förenas med elektroskopet», under det den andra elektroskopplattan och polen jordas. Jag har flera gånger och vid olika tillfällen gjort jämförande mätningar av potentialdifferenserna mellan en nifeackumulators, resp. batteris, poler med en Kolbes elektrometer. Därvid ha utslagen utan undantag blivit större om den negativa polen jordats (16 skaldelar utan glimmer, 6 skaldelar med glimmer mellan kondensatorplattorna, för en ackumulator) än om den positiva jordats (utslagen resp. 7—10 och 0—1 skaldel). Vid tillkoppling av flera ackumulatorer har utslaget i förra fallet ökats med 6 skaldelar (med glimmer) för varje, i senare fallet har ökningen blivit konstant och lika med 5 skaldelar, först sedan minst tre ackumulatorer kommit i

serien. Någon förklaring till denna avvikelse från det väntade resultatet har jag ej kunnat finna.

Kapitlet om elektriska svängningar har förf. infört i slutet av sin optik, där det utan tvivel får sin ur lärokursens synpunkt lämpligaste placering.

*

Bergholm och Ohlon ha också som bekant utgivit fullständiga läroböcker i fysik, omfattande kursens övriga delar. Deras framställningar äro i allmänhet präglade av reda och klarhet. Samtliga här omnämnda efter-Mollska författares arbeten representera att gott tillskott till vår läroboks-litteratur, men då jag ser dem vid sidan av Molls standardverk, får jag som ett uttryck för min personliga uppfattning säga, att »ingen räckte till tronen, där den gamle satt». Och i detta sammanhang är det en sak, som jag icke skall lämna oanmärkt, och det är förlagets egendomliga åtgärd, att i de tre första delarna av Ohlons lärobok införa ett avsevärt antal av de Mollska klichéerna.

I såväl Bergholms som Ohlons läroböcker är *statiken* den del, som tilltalar mig minst. Båda författarna definiera strax i början kraft såsom orsak till ändring i en kropps rörelsetillstånd. »Kraft» skall icke definieras. Det blir blott en lek med ord. Men eleven skall lära känna olika krafter och deras yttringar. Energibegreppet skjutes fram för tidigt. Vad detta innehållsdigra begrepp innebär, får eleven visserligen en förkänning av i de enkla maskinerna, men han får ett fylligare innehåll däri först då han gör bekantskap med de fenomen, som avslöja värmets natur, med elektriska strömmens kemiska, magnetiska och värmeverkningar och magnetfältets elektriska verkningar, med rörelseenergien och med de kemiska exotermiska och endotermiska reaktionerna. Att försöka ge energibegreppet redan i början av fysikundervisningen är ett försök att peta russina ur kakan, innan några russin blivit ditlagda. Ohlon inför arbetsbegreppet efter de enkla maskinerna, och det är bra.

Men i stället för att där ge definitionen på mekaniskt arbete talar förf. om arbete i vanlig mänsklig betydelse, och det är obegripligt, huru förf. sedan kan säga: »I själva verket har man funnit, att det fordras dubbelt så stort arbete att lyfta 50 kg som för att lyfta 25 kg samma höjd». Det har man icke »funnit». Man har definierat arbete såsom produkten av dragande kraft och väg. Längre ner fortsätter förf.: »Enligt proportionslärans lagar kunna vi alltså säga, att det vid en förflyttning uträttade arbetet är proportionellt mot produkten av den övervunna kraftens och vägens mätetal.» Detta språk är alldeles för lärt för en pojke i ring I, som först under andra terminen i denna ring stiftar någon bekantskap med »proportionslärans lagar». Hävstångslagen har också fått en olämpligt lärd framställning hos Ohlon. Likaså tror jag, att hans framställning av parallella krafters medelpunkt med dess dolda syftning mot tyngdpunkten skall bli ganska svårbegriplig för pojkarna. Båda författarnas bevis för Pascals princip är nog enkelt och klart för en fysiker, men de virtuella förskjutningarnas princip är absolut icke lämplig på detta stadium. Pascals princip behöver intet bevis. Den är omedelbart klar för åskådningen, såvida smådelarnas lättrörlighet är det. Specifik vikt definieras av båda författarna såsom förhållandet mellan kroppens vikt och vikten av en med kroppen lika volym vatten vid + 4°. Jag beklagar, att denna riktiga definition här återuppstår i en skolbok. Att definiera sp. vikt såsom det tal, som anger vikten pr volymsenhet i motsvarande mått, är fysikaliskt fullt försvarligt. Och denna definition har den goda egenskapen, att den är lätt begriplig både för pojken och för menige man.

»Mekanikens projektionssats» får av Ohlon en något lättsinnig behandling. Förf. säger, att den »förklarar» en hel del förhållanden. I själva verket »förklarar» den ingenting. Såsom exempel ger förf. segelbåtens kryssning och projicierar fördenskull vindens tryck mot seglet på båtens längdriktning, och därmed punkt och slut. Men om man då fortsätter att projiciera projektionen på en annan rikt-

ning, så kan man få segelbåten att gå vart som helst, och en kritisk elev undrar nog, vart de genom »projektionssatsen» borttrollade andra komposanterna tagit vägen. I annat fall kan han ju hissa segel i en balja och försöka kryssa. Ohlons förklaring av åran är oklar och oriktig. Förf. utritar tre krafter, trycket mot årans handtag, årtullens tryck mot åran och årans tryck mot årtullen. Det är en kraft för mycket, nämligen den sista, eller också en kraft för litet. Det kan nog sägas, att åran vrides under påverkan av sina två krafter, och båten följer med, men riktigare är det att tala om de krafter, som verka på båten. Det är roddarens reaktionstryck mot fotspjärnet l. d. och årans tryck mot årtullen, och den senare är större. Med tre krafter kan man i varje fall icke åstadkomma någon förklaring.

Båda författarna ha ett par sidor om vätskors och gasers strömning, och det skall jag icke opponera mig mot, om jag också icke hälsar dem med någon entusiasm. De saker, som behandlas av Ohlon i kapitlet om mediets motstånd mot rörelsen (flygmaskiner, kullager), tror jag icke äga något skolpedagogiskt värde, och de intresserade pojkarna ha i Svensk Motortidning en kunskapskälla, som de nog finna överlägsen det skolan kan bjuda. Däremot äro de uppgifter, som Bergholm lämnar i del V om luftmotståndet vid fallrörelse, av givande intresse och komma där på rätt plats. Ett litet trevligt kapitel i Ohlons bok handlar om vattenturbiner. Molekylarfysiken får av båda författarna en mycket god framställning.

Den tabellariska sammanställning av några ämnens gastäthet och molekylarvikt, som Bergholm giver i början av aerostatiken, anser jag icke vara lämplig av det skälet, att molekylarvikt icke är något, som man kan eller bör ge eleven till skänks. Dess verkliga innebörd skall klargöras av kemien. I sin värmelära omnämner förf. Avogadros lag, och där skulle tabellen ha haft en naturligare plats.

*

Jag har i det föregående framhållit, att jag icke anser dynamiken ha något berättigande i första realringen. Till Bergholms och Ohlons framställning av *dynamiken* i delarna I och V har jag icke mycket att säga. Men i någon mån synes den mig vara ett överflyttande av undervisningens tyngdpunkt från det fysikaliska till det abstrakt logiska, vilket i mycket högre grad är fallet med t. ex. Emil Alméns »Lärobok i de fasta kropparnas statik och dynamik». Jag sympatiserar icke med denna tendens. Accelerationsparallellogrammen har jag ingen användning för, och någon teoretisk behandling av kraftparallellogrammen giver jag aldrig. Till Bergholms framställning skulle jag vilja påpeka ett par småsaker. I del I (sid. 104), där det är fråga om experimentell undersökning av kraft, massa och acceleration, borde klart sägas ifrån, att det är fråga om hela systemets massa. På sid. 12 i del V talas om mekanik och dynamik såsom synonyma begrepp.

*

Beträffande de två återstående delarna, *värmeläran* samt *vågrörelselära, akustik och optisk*, skall jag fatta mig kort. Både Bergholms och Ohlons framställning är synnerligen redig. På värmeläran tar Ohlon kalorimetrien omedelbart efter utvidgningsläran. Bergholm tar den först efter ändring av aggregationstillstånden och har efter kalorimetrien ett kapitel om ångor. Båda författarna behandla meteorologien i ett sammanhang. Ohlon redogör i sin bok bl. a. för solventilen. Jag instämmer med hans i förordet uttalade åsikt, att de skriftliga uppgifter, som i studentexamen givas på utvidgningsläran, borde inskränkas. Till Ohlons framställning av absoluta nollpunkten skulle jag vilja anmärka, att denna icke kan återföras på vätgastermometern, ty vid — 273° finnes icke någon vätgas, utan vi få fylla termometern med en ideal gas, och vad den absoluta nollpunkten realiter betyder, får man klargöra i samband med frågan om värmets natur.

Bergholm börjar sin 4:e del med akustik och väver in vågrörelseläran i den. Ohlon tar vågrörelseläran för sig först. På optiken sammanfalla de båda författarnas dispositioner ofta i detalj. Jag finner det vara en riktig uppskattning av sakens intresse och betydelse, att de trycka kapitlet om ljusets natur med vanlig stil och icke med petit. Deras framställning av ett försök, som i dubbel mening är ett av fysikens vackraste, skulle jag vilja komplettera med ett par ord. Det gäller sammanbrytandet av de olikfärgade ljusstrålarna till en vit fläck och uppvisande av komplementfärger. (Se Moll-Rudberg fig. 91, sid. 62; Bergholm fig. 90, sid. 83; Ohlon fig. 97, sid. 76! Ohlons bild kan möjligen ge anledning till missförstånd. Det beror naturligtvis helt och hållet på skärmens avstånd, var linsen C skall placeras.) Den vita ljusfläcken får den kontur, som strålknippet har vid inträdet i prismat. I det snitt av strålknippet mellan linsen och skärmen, där det brytes ihop till ett rent spektrum, inför man stegvis från sidan ett prisma med så liten brytande vinkel, att de två bilder, som då alstras på skärmen av de utbrutna och de icke utbrutna strålarna, delvis täcka varandra. (Ett sådant litet prisma erhålles i optiska affärer.) Den gemensamma ytan blir klart vit, de andra delarna lysa i granna komplementfärger. Man kan genom pappersbländare ge strålknippet olika form t. ex. av en stjärna. Låter man det få rektangulär form, så erhåller man på skärmen en utomordentligt vacker »tricolor».

Samtliga nya läroböcker innehålla liksom Molls övningsexempel. Jag har icke gått igenom dem och kan därför icke fälla något omdöme om desamma.

Till redaktionen insända böcker.

Hilding Rodhe, *Förbränningsmotorer*, P. A. Norstedt & Söners förlag. 1925. 137 sid. Inb. i mjukt klotband kr. 4: 25.

Boken är en värdefull uppslagsbok för dem, som hava en elementär kännedom om förbränningsmotorer. Den behandlar motorbränslen och bränslets utnyttjande i cylindern. Avdelningen termodynamik förutsätter elementen av differential och integralräkning. Kapitlet om maskindelar och deras beräkning innehåller för konstruktörer nödvändiga formler. Kap. 6 redogör för utförda motorkonstruktioner, kap. 7 för dieselmotorer och kap. 8 behandlar 10 beräkningsexempel. *O. G—r.*

Sir William Bragg, *Om tingens väsen*, Hugo Gebers förlag 1925. 203 sid. och 32 helsidesplanscher; i texten 57 fig. Häft. kr. 5: 75. Översättning av doc. A. Odencrants och kand. E. Thall.

I denna bok äro särskilt läsvärda första föreläsningen, som avhandlar modern atomteori, samt de tre sista, som giva en framställning av kristallernas natur. Den andra föreläsningen om gasers natur och den tredje om vätskors natur innehålla föga nytt.

Boken är väl skriven och mycket lättläst. De få ställen, där några enkla räkningar förekomma, ingå på sådant sätt, att de kunna förbigås, utan att sammanhanget störes.

Boken lämpar sig synnerligen väl som premiebok till naturvetenskapligt intresserade gymnasister. Översättningen är omsorgsfull och tryckfelen få. *O. G—r.*

BERTIL HARBERG, *Lärobok i räkning och geometri*, för ungdomsskolor, eget förlag, Sjögestad, 3:e uppl. 1925. 190 sid. + facit. Kr 3: 25. *Dito*, mindre upplaga; 3:e uppl. 1925. 79 sid. + facit. Häft. kr 1: 50.

SVEN EM. OHLON, *Lärobok i fysik, V. Utvidgad kurs i dynamik*, P. A. Norstedt & Söners förlag, 1925. 65 sid. Kr. 1: 60.

C. RENDAHL OCH B. SÖDERBORG, *Astronomi*, samma förlag, 3:e uppl. 1926. 112 sid. Kr. 2: 50, häft. kr. 2: —.

LUDWIG RAMBERG, *Syra, bas och salt*, Uppsala Univ:s årsskrift 1925; A. B. Lundequistska bokh., Uppsala. 74 sid. Häft. kr. 2: 50.

OTTO GERTZ OCH KARL A. GRÖNWALL, *Grundlinjer till mineral- och bergartslära*, C. W. K. Gleerups förlag, 1923. 111 sid. Kr. 2: 50.

ANTON SÖRLIN, *Jorden och livet* (med förord av prof. GERARD DE GEER; ingår i den populärvetenskapliga serien *Himmel, hav och jord*), Lars Hökerbergs bokförlag, 1925. 313 sid. Kr. 10: —, h. kr. 7: 50.

BERTIL HARBERG, *Lärobok i geologi*, eget förlag, Sjögestad, 1925. A. Text, 47 sid. B. Bilder, 48 sid. Kr. 2: —.

AXEL WALLÉN, *Klimatet och människan ur hävd och forskning*, P. A. Norstedt & Söners förlag, 1925. 219 sid. Kr. 6: 50, häft. kr. 5: 50.

V. BJERKNES, *C. A. Bjerknes, Hans liv och arbeide, Træk ur norsk kulturhistorie i det nittende aarhundrede*, H. Aschehoug & Co, Oslo, 1925. 240 sid.

Råd och vinkar för undervisningen.[1]

1. Ett och annat planimetriskt ex. på oändliga geometriska serier kan genom lämplig uppritning av figur lösas rent planimetriskt, varigenom riktigheten av med hjälp av summationsformel erhållet resultat kan kontrolleras. Ex. *I en rätvinklig triangel äro kateterna 6 och 8 cm. På den större av dessa såsom hypotenusa uppritas en ny triangel, likformig med den givna; på den så erhållna triangelns större katet uppritas på samma sätt en ny triangel o. s. v. i oändlighet. Beräkna summan av samtliga trianglars ytor.* (Fig. 1).

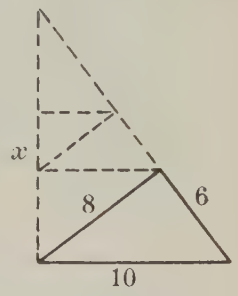


Fig. 1.

Den obekanta kateten x beräknas ur analogien $\frac{x}{10}=\frac{8}{6}$, varav $x=13\frac{1}{3}$ cm. Den sökta ytan blir $5x=66\frac{2}{3}$ cm^2. (*H—m.*)

2. Åtskilliga ex. på räta linjen i analytiska geometrien lösas enkelt med användning av satsen, att ekvationen för en rät linje, som är parallell med linjen $Ax+By+C=0$, har formen $Ax+By+D=0$ och ekvationen för en rät linje, som är vinkelrät mot linjen $Ax+By+C=0$, har formen $Bx-Ay+D=0$. Ex. *Punkten $P(3, 4)$ och räta linjen $2x-3y+5=0$ äro givna. Bestäm ekvationen för en genom P dragen rät linje, vilken är a) parallell med b) vinkelrät mot den givna linjen.*

a) Låt den sökta linjens ekvation vara $2x-3y+D=0$.

[1] Red. har för avsikt att under denna rubrik lämna korta redogörelser utan alla anspråk på originalitet för härledning av formler, för lösning av speciella problem, för konstruktion av smärre apparater, för skolexperiments utförande o. dyl., i den mån dessa kunna tänkas vara av intresse för undervisningen. Bidrag mottagas med tacksamhet.

Emedan linjen går genom (3, 4), blir $6-12+D=0$, varav $D=6$. Linjens ekvation blir sålunda $2x-3y+6=0$.

b) Linjens ekvation antages vara $-3x-2y+D_1=0$. På liknande sätt som nyss erhålles $-9-8+D_1=0$, varav $D_1=17$. Linjens ekvation blir alltså $3x+2y-17=0$. (*H—m.*)

3. Åtskilliga ex. på parabeln kunna som bekant lösas såväl analytiskt som geometriskt. Ex. *En rörlig korda till en parabel går genom brännpunkten; i kordans ändpunkter äro normaler dragna till parabeln. Visa, att dessa normaler alltid äro vinkelräta mot varandra.*

a) *Analytisk lösning.* Låt parabelns ekvation vara $y^2=4ax$ och kordans ekvation $y=k(x-a)$. Skärningspunkterna mellan kordan och parabeln bestämmas då av ekvationssystemet

$$\begin{cases} y=k(x-a) \\ y^2=4ax\,. \end{cases}$$

Genom elimination av x erhålles

$$y^2-\frac{4ay}{k}-4a^2=0.$$

Äro nu kordans ändpunkter (x_1, y_1) och (x_2, y_2), blir alltså rötternas produkt $y_1y_2=-4a^2$, varav $-\frac{y_1}{2a}=\frac{2a}{y_2}$.

Normalerna, vilkas vinkelkoefficienter äro $-\frac{y_1}{2a}$ och $-\frac{y_2}{2a}$, äro sålunda vinkelräta mot varandra.

b) *Geometrisk lösning.* Drag diametrarna genom kordans ändpunkter. Då dessa äro inbördes parallella, så blir summan av innervinklarna mellan kordan och diametrarna $=180°$. Summan av vinklarna vid kordans ändpunkter i den triangel, som bildas av kordan och normalerna, är alltså 90°, varför triangeln måste vara rätvinklig. (*H—m.*)

4. Satsen om sambandet mellan sidorna i en fyrhörning, som är omskriven kring en cirkel, bevisas ju mycket lätt. Beviset för omvändningssatsen: *Om i en fyrhörning med sidorna i ordning a, b, c och d det gäller, att* $a+c=b+d$,

så kan en cirkel inskrivas i densamma, brukar ofta vara rätt invecklat (se t. ex. Asperéns geometri, sats XLIV, b). Ett enkelt, rakt på sak gående bevis är följande:

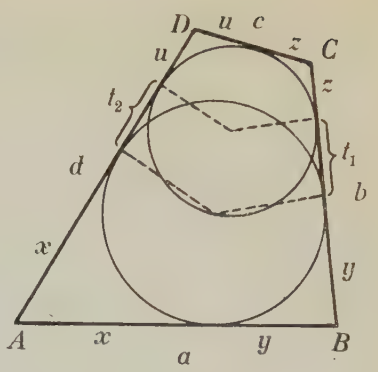


Fig. 2.

I fyrhörningen *ABCD* antas, att $a+c=b+d$. Vi rita en cirkel, som tangerar *DA*, *AB* och *BC* och en annan, som tangerar *BC*, *CD* och *DA*, samt skola visa, att dessa cirklar sammanfalla, d. v. s. att $t_1=t_2=0$. Med fig:s beteckningar har man, att

$$a+c=x+y+z+u\,,$$

$$b+d=x+u+y+z+t_1+t_2\,.$$

$$\because\ t_1+t_2=0.$$

Då t_1 och t_2 i godtyckliga fyrhörningar kunna vara positiva eller negativa men alltid ha *samma* tecken, eftersom de i fig. 2 dragna radierna äro parvis parallella, har man således, att

$$t_1=t_2=0,\quad \text{v. s. b.}$$

Efter B. Kerst, *Zeitschr. für Math. u. naturwiss. Unterr. aller Schulgattungen, h. 6, 1925.* (*Hj. O.*)

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

209) För vilka heltalsvärden på a är $\dfrac{a^4 - a^3 - 8a^2 + 5a - 9}{a^2 + 2a - 3}$ ett helt tal? *X.*

210) Från en rörlig punkt P på en fix parabelnormal fällas de bägge andra normalerna PA och PB. Visa, att kordan AB är oföränderlig till sin riktning. *X.*

211) Diskutera fullständigt problemet: Sök orten för mittpunkterna av alla genom en fast punkt gående kordor till ett givet käkelsnitt. *Iter.*

212) En triangel ABC och dess inskrivna cirkel äro givna. Till cirkeln drages en fjärde tangent, som skär AB och AC i resp. D och E. Vidare drages $BH \parallel DC$ och $CK \parallel EB$. BH skär AC i H, CK skär AB i K. Sök enveloppen till linjen HK.

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.

213) Lös systemet $\left.\begin{aligned} x^2 + y^2 - 2ax + 2by &= 0 \\ xy + bx - ay - 2ab &= 0 \end{aligned}\right\}$.

214) Lös ekvationen

$$2 \log x + \log (2x - 3) = \log (3x - 2).$$

215) Lös ekvationen

$$\sin 2x + 2 \sin^2 x = a$$

och angiv möjlighetsvillkoret.

216) Hörnpunkterna av en kvadrat med sidan a tagas till medelpunkter för cirklar med radien a. Beräkna ytan av den krokliniga fyrhörning, som bildas inuti kvadraten.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÅGMAN, till vilken uppgifter och lösningar godhetsfullt kunna insändas under adress: Högre reallläroverket å Östermalm, Stockholm.

217) En flygmaskin stiger i höjd genom att beskriva en jämn spiral. Lodlinjen genom maskinen beskriver härvid en cylindermantel. Då lodlinjen har sitt minsta avstånd, 300 m, till en åskådare, iakttager denne maskinen under en höjdvinkel av 46°. Då maskinen hunnit det motsatta läget, d. v. s. gått halva spiralen, är dess höjdvinkel 17° och då hela spiralens omkrets fullbordats 67°. Sök spiralens stigning och diameter.

218) På ett plan stå tre kongruenta, liksidiga koner, vilkas bottenperiferier tangera varandra två och två. Beräkna radien i den sfär, som tangerar de tre konerna samt planet genom topparna.

219) I en regelbunden oktaeder inskrives en kub, som har sina hörn på oktaederns kanter. Sök förhållandet mellan kubens och oktaederns volymer.

220) En rät linje rör sig så, att dess avskärningar a och b på x- och y-axlarna resp. alltjämt uppfylla villkoret $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{k^2}$, där k är en konstant. Bestäm geometriska orten för normalens från origo fotpunkt på linjen.

Lösningar till uppg. 187—189.

187. *Att upprita en triangel, där två sidor äro givna och en vinkel skall vara dubbelt så stor som en annan (3 fall).*

Lösning 1) Sidorna a, b givna ($a \geqq b$). För korthetens skull skall den tredje sidan i det följande benämnas *basen*. Vi särskilja tre fall.

I. Ena basvinkeln dubbelt så stor som den andra.

Då är
$$\frac{a}{b}=\frac{\sin 2\beta}{\sin \beta}=2\cos\beta,$$
$$\cos\beta=\cos\tfrac{1}{2}\alpha=\frac{a}{2b}.$$

Möjlighetsvillkor: $2b > a > b$ (*en* lösning).

II. Vinkeln vid spetsen dubbelt så stor som ena basvinkeln.

Antages $\gamma = 2\beta$, har man

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin 3\beta}{\sin \beta} = \frac{3\sin\beta - 4\sin^3\beta}{\sin\beta} = 3 - 4\sin^2\beta,$$

varav

$$\sin^2\beta = \frac{3b-a}{4b},$$

$$\cos^2\beta = \frac{a+b}{4b},$$

$$\cos\gamma = \cos 2\beta = \frac{a-b}{2b}.$$

Antages $\gamma = 2\alpha$, erhålles på samma sätt

$$\cos\gamma = \frac{b-a}{2a},$$

$$\cos(\pi - \gamma) = \frac{a-b}{2a}.$$

För $a = b$ erhålles en likbent och rätvinklig triangel. För $a \neq b$ erhålles,

för $a < 3b$, 2 lösningar,
» $a \geqq 3b$, 1 lösning.

III. Vinkeln vid spetsen hälften av ena basvinkeln.

Antages $\beta = 2\gamma$, har man

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin 3\gamma}{\sin 2\gamma} = \frac{3 - 4\sin^2\gamma}{2\cos\gamma} = \frac{4\cos^2\gamma - 1}{2\cos\gamma},$$

varav

$$\cos^2\gamma - \frac{a}{2b}\cos\gamma = \tfrac{1}{4},$$

$$\cos\gamma = \frac{a + \sqrt{a^2+4b^2}}{4b}.$$

Antages $\alpha = 2\gamma$, erhålles på samma sätt

$$\cos\gamma = \frac{b + \sqrt{b^2+4a^2}}{4a}.$$

För $a=b$ är lösningen angiven hos Euklides (IV: 10). För $a \neq b$ erhålles,

för $b > \frac{2}{3}a$, 2 lösningar,
» $b \leqq \frac{2}{3}a$, 1 lösning.

I det föregående har överallt bortsetts från det triviala fallet, att en av vinklarna är $=\pi$.

Lösning 2) Lösningen kan även baseras på följande sats:

Om en vinkel i en triangel är dubbelt så stor som en annan vinkel, så är kvadraten på den sida, som står mot den större vinkeln, så mycket större än kvadraten på den sida, som står emot den mindre, som rektangeln av denna sida och den tredje sidan. (Antomari, Journal de Mathématiques élémentaires, problem 119).

Bevis: I triangeln ABC med sidorna a, b, c och vinklarna α, β, γ antages $\alpha=2\beta$. Från A drages bissektrisen AV, som delar BC i segmenten $CV=b_1$, $BV=c_1$. Då nu $\triangle ABC \sim VAC$, har man

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{b_1}=\frac{c}{c_1}=\frac{b+c}{a},$$

varav $$a^2=b^2+bc.$$

Med tillämpning av denna sats blir lösningen följande: Vi antaga a, b vara givna ($a \geqq b$).

I. $\alpha=2\beta$, $\because a^2-b^2=(a+b)(a-b)=bc$.

Den tredje sidan konstrueras såsom fjärde proportionalen till b, $a+b$, $a-b$.

Möjlighetsvillkor: $2b > a > b$ (*en* lösning).

II. Vinkeln mellan de givna sidorna dubbelt så stor som en av de övriga.

Den tredje sidan kan i detta fall konstrueras såsom medelproportional till två kända sträckor:

1) $\gamma=2\alpha$, $\because c^2=a(a+b)$.

I detta fall erhålles alltid *en* lösning.

2) $\gamma=2\beta$, $\because c^2=b(a+b)$.

Möjlighetsvillkor: $a < 3b$ (*en* lösning).

III. Vinkeln mellan de givna sidorna hälften så stor som en av de övriga.

Den tredje sidan erhålles såsom positiv rot till en fullständig ekvation av andra graden:

1) $\alpha = 2\gamma$, $\because\ c(c+b) = a^2$.

I detta fall erhålles alltid *en* lösning.

2) $\beta = 2\gamma$, $\because\ c(c+a) = b^2$.

Möjlighetsvillkor: $b > \frac{2}{3}a$ (*en* lösning).

Iter.

Lösning 3) Vi förutsätta vanliga beteckningar, att de givna sidorna äro a och b *samt att* $a \gtrless b$. Man får då följande fall:

I. Avsätt $BC = a$. Cirklarna med radien b och centrum i B och C råkas i A_1. BA_1 skär cirkeln (C) för andra gången i A; då är ABC en av de sökta trianglarna med $(\alpha = 2\beta)$.

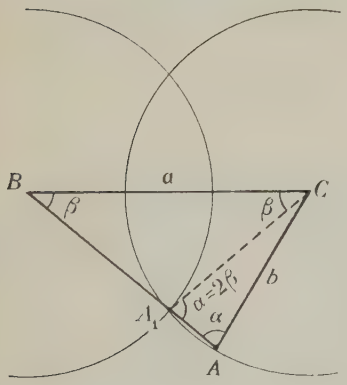


Fig. 1.

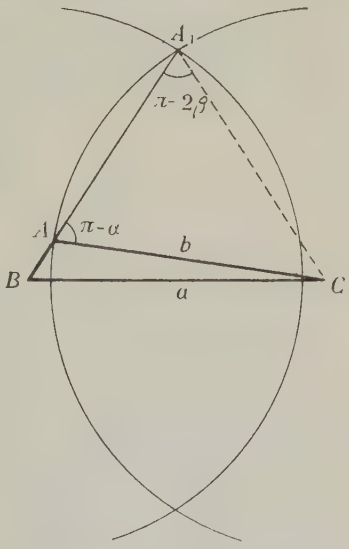


Fig. 2.

Möjlighetsvillkor: $a > b > \frac{a}{2}$. (Två fall, allteftersom $a \gtrless b\sqrt{2}$).

II. α) Upprita en cirkel med centrum C och radien a. Avsätt $CA = b$. AC skär utdragen över C cirkeln i D. Mitt-

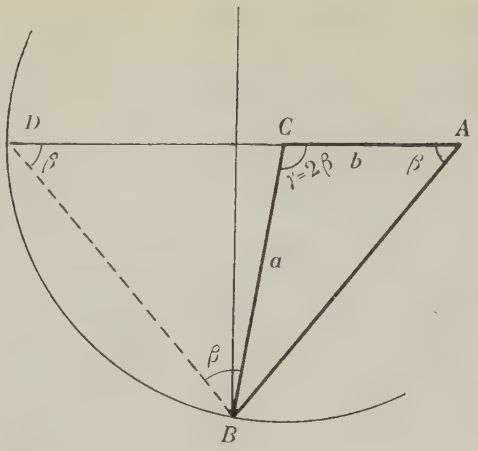


Fig. 3.

punktsnormalen till AD skär cirkeln i B; då är $\triangle ABC$ en av de sökta med $(\gamma = 2\alpha)$.

β) *Om* $b < a < 3b$, får man genom att låta a och b byta roll i föregående konstruktion en ny triangel ABC med $(\gamma = 2\beta)$.

III. α) Upprita på $DA = b$ som diameter en cirkel och konstruera på DA:s förlängning den punkt B, som har potensen a^2 med avseende på cirkeln. Gör $AC = b$, $BC = a$, så är $\triangle ABC$ en av de sökta med $(\alpha = 2\gamma)$. Till följd av $BC^2 = BA \cdot BD$ är nämligen $\triangle ABC \sim \triangle CBD$, och därav följer sedan, då $AD = AC$, den påstådda egenskapen.

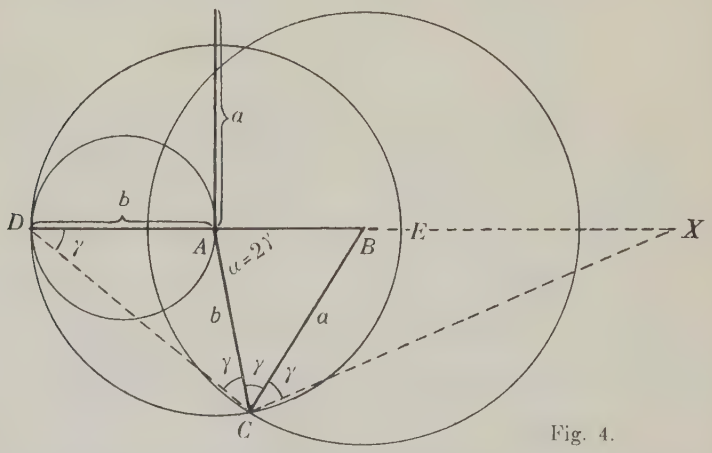


Fig. 4.

β) *Om* $\frac{2}{3}a < b < a$,[1] får man genom utbyte av a och b

[1] Jfr uppgift 37, årg. 3, sid. 60. B måste falla längre från A än radikalaxeln till cirkeln AD och punktcirkeln E, som går på avståndet $\frac{b}{3}$ från A. Då är B:s potens $> \left(\frac{2b}{3}\right)^2$ och $a > \frac{2b}{3}$.

i föregående konstruktion ytterligare en lösning ABC. I denna triangel är $(\beta = 2\gamma)$. Därmed äro 5 av de 6 möjligheterna av typen $(\alpha = 2\beta)$ genomgångna. Den återstående $(\beta = 2\alpha)$ ger intet, då $a \geqq b$.

Anm. För $a = b$ ger konstruktion III den bekanta triangeln, som bildas av en sida och radierna till dess ändpunkter i den reg. 10-hörningen, samt »gyllene snittet». Denna konstruktion löser också uppgiften att finna en likbent triangel (ACX i fig. 4), då basen och en inre eller yttre bissektris till ena basvinkeln äro givna. *X.*

188. *Sök orten för mittpunkterna till alla kordor i en cirkel, som från en given punkt synas under rät vinkel.*

I cirkeln med medelpunkten A och radien a dragas genom en punkt B på avståndet b från medelpunkten två mot varandra vinkelräta kordor. Dessa utskära på cirkeln 4 punkter, genom vilka bestämmas 4 kordor, som synas från B under räta vinklar. Vi betrakta en sådan korda CD vilken som helst. Betecknas mittpunkten av AB med M och mittpunkten av CD med P, har man

$$\overline{AC}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{CP}^2 = \overline{AP}^2 + \overline{BP}^2 = 2\overline{MP}^2 + \tfrac{1}{2}\overline{AB}^2,$$

$$\therefore\ \overline{MP}^2 = \tfrac{1}{2}\overline{AC}^2 - \tfrac{1}{4}\overline{AB}^2 = \tfrac{1}{2}a^2 - \tfrac{1}{4}b^2.$$

Avståndet MP är således konstant för alla kordor, som synas från B under rät vinkel, den sökta orten således en cirkel med medelpunkten M och radien

$$\varrho = \tfrac{1}{2}\sqrt{2a^2 - b^2}.$$

För $b = 0$ erhålles en med $A(a)$ koncentrisk cirkel, som tangerar sidorna i de i $A(a)$ inskrivna kvadraterna. För $b < a$ faller $M(\varrho)$ helt inom $A(a)$ och omsluter dennas medelpunkt A, för $b = a$ går $M(\varrho)$ genom A och tangerar $A(a)$, för $a < b < a\sqrt{2}$ ligger $M(\varrho)$ åter helt inom $A(a)$, vars medelpunkt nu ligger utanför $M(\varrho)$. För $b = a\sqrt{2}$ sammankrymper $M(\varrho)$ till en punkt. För $b > a\sqrt{2}$ blir $M(\varrho)$ imaginär; i detta fall kan man icke i $A(a)$ draga någon korda, som synes från B under rät vinkel.

Cirkeln $M(\varrho)$ utgör, såsom lätt inses, tillika orten för fotpunkten av normalen från B mot kordan CD. Kordorna tangera, som bekant, ett kägelsnitt, vars brännpunkter ligga i A och B. Kägelsnittet är en ellips, när B ligger inom, en hyperbel, när B ligger utom $A(a)$. Ligger B på $A(a)$, så reduceras kägelsnittet till punkterna A och B.

Iter.
Även löst av *X*.

189. *O är en cirkels medelpunkt, A en punkt inom cirkeln. Genom A dragas till periferin linjerna AB och AC, som med AO göra vinklarna α och $\pi - \alpha$ resp. och ligga på ena sidan av AO. Visa att BC skär OA:s förlängning i en punkt, som är konstant för olika α.*

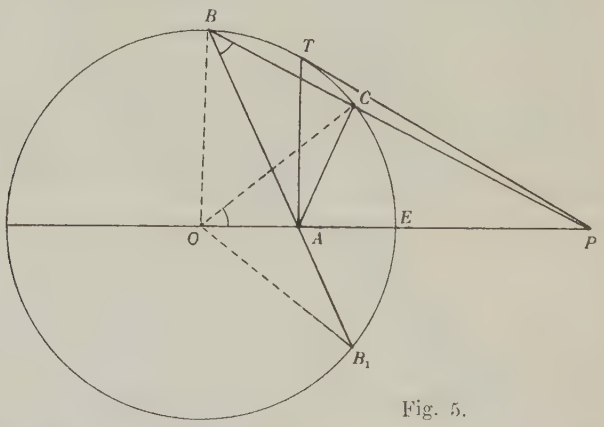


Fig. 5.

Av symmetriskäl äro bågarna EC och EB_1, se fig. 5, lika. Följaktligen är $\angle COE = \frac{1}{2} \angle COB_1 = \angle CBA$. A, B, C, O äro alltså koncykliska och $PA \cdot PO = PT^2$. Om (A_1) är fotpunkten för normalen från T mot OP, är även $PA_1 \cdot PO = PT^2$. A och A_1 sammanfalla alltså, och P, som är polen till den fixa linjen AT, är själv fix och ligger på OA:s förlängning på avståndet $\frac{r^2}{OA}$ från O.

X (vilken även generaliserat uppgiften).
Även löst av *Iter.*

Procent- och ränteräkning i skolan och i praktiken.

Av OTTO ENEROTH.

II.

Speciella metoder vid ränteberäkningen.

Utgångspunkten för ränteberäkningen är även i praktiken den traditionella formeln $r = \frac{kpt}{100}$, där enheten för tiden är året. Vill man ange tiden i dagar, inträffa olika fall.

1. Året = kalenderåret = 365 dagar.

$$r = \frac{kdp}{36\,500}.$$

d = faktiska dagantalet enligt almanackan.

2. Året = bankåret = 12 månader à 30 dagar.

$$r = \frac{kdp}{36\,000}.$$

d = reducerat dagantal på grund av bestämmelsen om månadens längd.

3. Kompromiss mellan 1) och 2).

Formeln i yttre måtto densamma som i 2), men
d = faktiska dagantalet enligt 1).

För att särskilja de trenne fallen kan man lämpligen benämna dem engelska, tyska och franska metoden, med nu angiven ordning.

De svenska bankerna använda i allmänhet metod 2) utom

vid omräkning av främmande växlar, d. v. s. växlar i utländskt mynt, då för det mesta vederbörande lands regel tillämpas, liksom man naturligtvis alltid använder dettas diskontsats.

Alla officiella myndigheter använda metod 1), av praktikens män benämnd den *exakta* metoden.

Beräkningen av d = tiden mellan tvenne data.

Om en växel förfaller till betalning t. ex. den 30 april och diskonteras den 15:e i samma månad, avdrages ränta för 30—15 = 15 dagar, härom råder fullständig enighet. Man subtraherar sålunda begynnelsedagens *nummer* från slutdagens, d. v. s. räknar ej med begynnelsedagen, men väl slutdagen, alltså »från — till och med». Självfallet blir dagantalet detsamma, om man räknar »från och med — till», men icke förty är det för tillämpningarna av vikt att ha observerat innebörden av *subtraktionsregeln*. Denna är nämligen identisk med regeln för avläsningen av avståndet mellan tvenne punkter på en skala. Nollpunkten ligger vanligen vid års- eller månadsskiftet. En helårsräkning går därför från den sista december ena året (nummer 0) till den sista december följande år (nummer 365 eller 360), en månadsräkning likaså från den sista till den sista. Har man vid årsskiftet penningar innestående i en bank, lägger denna väl upp den nya räkningen den 1 januari, men behållningen, saldot, valuteras per den 31 december föregående år. Dessa tvenne regler:

1) dagantalets bestämning genom subtraktion av numren för begynnelsedag och slutdag, samt

2) saldots valutering per den sista dagen på den gamla räkningen,

kunna anses utgöra grundvalen för tidsberäkningen.

Dagantalets beräkning med kalendermånader. Bekvämast är att på engelskt sätt använda en nummertabell med en kolumn för varje månad och med 31 numrerade rader.

Tabell.

	Jan.	Febr.	Mars	April	Maj	Juni	Juli	Aug.	Sept.	Okt.	Nov.	Dec.
1	1	32	60	91	121	152	182	213	244	274	305	335
2	2	33	61	92	122	153	183	214	245	275	306	336
3	3	34	62	93	123	154	184	215	246	276	307	337
4	4	35	63	94	124	155	185	216	247	277	308	338
5	5	36	64	95	125	156	186	217	248	278	309	339
6	6	37	65	96	126	157	187	218	249	279	310	340
7	7	38	66	97	127	158	188	219	250	280	311	341
8	8	39	67	98	128	159	189	220	251	281	312	342
9	9	40	68	99	129	160	190	221	252	282	313	343
10	10	41	69	100	130	161	191	222	253	283	314	344
11	11	42	70	101	131	162	192	223	254	284	315	345
12	12	43	71	102	132	163	193	224	255	285	316	346
13	13	44	72	103	133	164	194	225	256	286	317	347
14	14	45	73	104	134	165	195	226	257	287	318	348
15	15	46	74	105	135	166	196	227	258	288	319	349
16	16	47	75	106	136	167	197	228	259	289	320	350
17	17	48	76	107	137	168	198	229	260	290	321	351
18	18	49	77	108	138	169	199	230	261	291	322	352
19	19	50	78	109	139	170	200	231	262	292	323	353
20	20	51	79	110	140	171	201	232	263	293	324	354
21	21	52	80	111	141	172	202	233	264	294	325	355
22	22	53	81	112	142	173	203	234	265	295	326	356
23	23	54	82	113	143	174	204	235	266	296	327	357
24	24	55	83	114	144	175	205	236	267	297	328	358
25	25	56	84	115	145	176	206	237	268	298	329	359
26	26	57	85	116	146	177	207	238	269	299	330	360
27	27	58	86	117	147	178	208	239	270	300	331	361
28	28	59	87	118	148	179	209	240	271	301	332	362
29	29	—	88	119	149	180	210	241	272	302	333	363
30	30	—	89	120	150	181	211	242	273	303	334	364
31	31	—	90	—	151	—	212	243	—	304	—	365

Ex. 28 febr.—28 maj. Detta är nominellt 3 månader, men då 28 maj har nummer 148 och 28 febr. nummer 59, blir dagantalet $148 - 59 = 89$. Anmärkas bör i detta sammanhang, att om en växel är utställd den 28 febr. och säges förfalla 3 månader à dato, så blir förfallodagen i alla länder den 28 maj (frånsett s. k. respitdagar). Antalet räntedagar beror däremot på varje lands beräkningsmetod.

Dagantalets beräkning med 30-dagars månader. Då varje månad här antages ha samma längd, subtraheras begynnelsemånadens nummer från slutmånadens liksom ock de två gränsdagarnas nummer inom respektive månader.

Ex. 1) 28 febr.—28 maj. Beräkning: $\frac{28-28}{5-2} = \frac{0}{3}$.

Nämnaren betyder antal månader, täljaren antal dagar. Dagantalet $= 90$.

Ex. 2) 18 febr.—28 maj. Beräkning: $\frac{28-18}{5-2} = \frac{10}{3}$.

Dagantalet $= 90 + 10 = 100$.

Ex. 3) 28 febr.—18 maj. Beräkning: $\frac{18-28}{5-2} = \frac{-10}{3}$.

Dagantalet $= 90 - 10 = 80$.

Ex. 4) 24 okt.—12 jan. följande år. De tvenne data åtskiljas här av årsskiftet. Slutdagens månadsnummer ökas då med 12. Beräkning: $\frac{12-24}{13-10} = \frac{-12}{3}$.

Dagantalet $= 90 - 12 = 78$.

Ex. 5) 1 jan.—25 mars. Beräkning: $\frac{25-1}{3-1} = \frac{24}{2}$.

Dagantal $60 + 24 = 84$.

Anmärkningar:

1. Slutdatum sättes givetvis först, då dess totalnummer är störst.

2. Den 28 febr. behåller alltid sitt nummer, vare sig den är begynnelsedag eller slutdag. Det är vid övergången från febr. till mars, som de två felande dagarna i febr. tilläggas. Men detta kan ej ske, om dagen ej får behålla sitt num-

mer. Då man ej kan skjuta in någon dag mellan två dagar i samma månad, kan den 28 febr. ej heller som slutdag förändra nummer. Ett skenbart undantag föreligger i följande exempel: En 3-månaders växel, som är utställd den 30 nov., förfaller den 28 febr., då den 30 febr. ej existerar. Men vid diskontering måste dagantalet sättas = 90 minus det från 30 nov. till diskonteringsdagen förflutna dagantalet.

3. Den 31 betecknas däremot alltid vid ränteberäkningen med nummer 30. Alltså blir det samma dagantal, vare sig den 30 eller den 31 i samma månad angives som förfallodag.

Tillämpningar.

a. *Insättning och uttag på bankräkningar.*

I de flesta fall gäller bestämmelsen, att vid insättning ränta beräknas från och med nästföljande helgfria dag, vilket på bankspråk, såsom redan antytts, uttryckes så, att insättningen *valuteras per* den nämnda dagen. I överensstämmelse härmed säges, att uttag valuteras per samma dag det göres. Äro valuteringsdagarna väl fastställda, bestämmes dagantalet enligt subtraktionsregeln. Bankregeln innebär ej annat än att ett uppskov skall ske med ränteberäkningen på insättningen. Toge man uttrycket »ränta beräknas på insättning från och med etc.» efter ordalydelsen, så borde insättningen valuteras per dagen näst före närmast kommande helgfria dag och uttaget per den dag, som föregår uttagsdagen. Anmärkas bör, att vid såväl depositions- som kapitalräkning även insättningarna liksom uttagen valuteras per samma dag de göras. Detta är allmän regel. Insättningar, som göras vid själva årsskiftet, valuteras av en del banker per den sista dec., i den vällovliga avsikten att ej behöva gå förbi saldots valuteringsdag. Något besvär vållas, om en insättning göres t. ex. den 30 okt. och efterföljes av ett uttag den 31, då den förra valuteras per den 1 nov. och det senare per den 30 okt. Svårigheten löses enklast genom en dags diskontavdrag på det existerande saldot, innan uttaget noteras.

b. *Tidpunkten för valutering av räntefots-förändring.*

Skall räntefoten ändras vid halvårsskiftet, avslutas räkningen den 30 juni och ränta beräknas efter den gamla räntefoten. Den nya räkningen lägges upp den 1 juli, och saldot valuteras per den 30 juni, som alltså blir utgångspunkten (nollpunkten) för den fortsatta ränteberäkningen efter den nya räntefoten, allt i överensstämmelse med förut givna regel. Inträffar ränteförändringen under löpande månad, bör naturligtvis samma metod tillämpas. Skall t. ex. ny räntesats tillämpas *från och med den 8:e*, så sker avslutning av gamla räkningen den 7:e, som då blir nollpunkt för den fortsatta räkningen, vilken börjar den 8:e. Angives däremot förändringen träda i kraft *från den 8:e*, så blir detta datum den gamla räkningens sista dag.

Räkning med räntetal och räntedivisorer.

A. Om man i formeln $r = \frac{kdp}{36\,000}$

antager, att p går jämnt upp i nämnaren, kan det förkortas bort.

Ex. $p = 5$, $\qquad r = \frac{kd}{7\,200}$.

Produkten kd benämnes räntetal, nämnaren 7 200 den till 5 % hörande räntedivisorn. Metoden är fördelaktig vid bokföring av räntor, då samma räntefot gäller för flera kapitalvärden. Man adderar då räntetalen och dividerar summan med den till procenten hörande räntedivisorn. Särskilt enkel blir räkningen, om $p = 6$ och $d = 60$. Då blir $r = \frac{k}{100}$ d. v. s. 1 % av kapitalet. Reduktion till den givna procenten och dagantalet sker medelst den inom handelsvärlden och speciellt i de anglosaxiska länderna omhuldade parträkningen (aliqvot parts l. practice). Uti det i föregående häfte citerade arbetet av Hart & Watts benämnes metoden »The Bankers' or sixty-day Method». Med en obetydlig omredigering må här återgivas ett exempel ur nämnda bok.

Ex. Beräkna räntan på Dollars 580 för 1 år, 7 mån. 16 dag. efter 4 %.

Räntan blir efter 6 % och 60 dag.		$ 5,80
» » » » »	18 mån. = 9 × 60 dag.	» 52,20
» » » » »	1 mån. = $\frac{1}{2}$ · 60 dag.	» 2,90
» » » » »	10 dag. = $\frac{1}{3}$ mån. ...	» 0,97
» » » » »	6 dag. = $\frac{1}{5}$ mån. ...	» 0,58
		$ 56,65
För reduktion till 4 % frånd rages $\frac{1}{3}$		— 18,88
		∴ $ 37,77

Metoden finnes upptagen i Lärobok i räkning av Asperén & Damm, del II.

Anm. Det är fördelaktigt att först uträkna räntan efter en procent, som har särskilt enkel räntedivisor (36 000 : p), om skillnaden mellan denna procent och den givna är en enkel bråkdel av den förra.

Ex. $5\frac{1}{2}\,\% = 5\,\% + \frac{1}{10} \cdot 5\,\%$, $3\frac{1}{2}\,\% = 4\,\% - \frac{1}{8} \cdot 4\,\%$, $3\frac{1}{2}\,\% = 3\,\% + \frac{1}{6} \cdot 3\,\%$.

Sådana reduktionsövningar äro mycket nyttigare än att t. ex. drilla med att $3\frac{1}{2}\,\% = \frac{7}{200}$, $5\frac{1}{2}\,\% = \frac{11}{200}$ o. s. v.

B. *Engelska metoden.* (Third, tenth and tenth rule.)

Formeln $$r = \frac{kdp}{36\,500}$$

ger enkel räntedivisor endast för $p = 5$. Då blir $r = \frac{kd}{7\,300}$.

Engelsmännen beräkna därför räntan först efter 5 % och utföra divisionen med 7 300 medelst parträkning efter en approximativ metod, som är känd under ovan angivna namn.

Tydligen är $$r = \frac{kd}{10\,000} \cdot \frac{10\,000}{7\,300}.$$

Förvandla den senare faktorn till decimalbråk. Resultatet blir med en ringa förhöjning = 1,37, där felstorleken utgör $\frac{1}{7\,300}$ av faktorn $\frac{kd}{10\,000}$.

Exakt är

$$1{,}37 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}.$$

Man får sålunda

$$r = \frac{kd}{10\,000} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}\right).$$

Som formel betraktad är den ju skrymmande, men vid användning synnerligen bekväm.

Ex. $k = £\,576$, dag. $= 75$.

$$\frac{kd}{10\,000} = 4{,}3200$$

$$\frac{1}{3} \cdot \quad » \quad = 1{,}4400$$

$$\frac{1}{30} \cdot \quad » \quad = 0{,}1440$$

$$\frac{1}{300} \cdot \quad » \quad = 0{,}0144$$

$$5{,}9184$$

När uppgår felet till 1 penny d. v. s. $\frac{1}{240}$ av pundet? Då felet utgör $\frac{1}{7\,300}$ av faktorn $\frac{kd}{10\,000}$, blir frågan närmast, hur stor denna faktor skall vara för att felet skall få just detta värde. Vi sätta faktorn $= x$ och finna då

$$\frac{x}{7\,300} = \frac{1}{240},$$

en likhet, som i det närmaste ger

$$x = 30.$$

Tillämpas den nyss givna regeln, får man $r = 41, \ldots$ Som $\frac{1}{240} = 0{,}004\ldots$, kan man säga, att då räntan uppgår till omkring 40 enheter, bör $0{,}004$ subtraheras. För varje enhet av räntan bör alltså frändragas $0{,}0001$.

I det nyss uträknade exemplet blir alltså felkorrigeringen

$$\begin{array}{r} 5{,}9184 \\ -\ 0{,}0006 \\ \hline 5{,}9178 \end{array}$$

Sedan räntan sålunda uträknats efter 5 %, sker övergången till den givna räntefoten som vanligt medelst parträkning. Vill man undvika detta och genast erhålla räntan efter den givna procenten, förlänger man det ursprungliga bråket med 2 och får då $r = \dfrac{kd\,2p}{73\,000}$.

Man får då

$$r = \frac{kd\,2p}{100\,000} \cdot \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{30} + \frac{1}{300}\right).$$

Det är sålunda endast faktorn framför parentesen, som ändrats. Felet blir $\dfrac{1}{7\,300}$ av densamma, och korrektionsregeln omredigeras för praktiskt bruk liksom i förra fallet. Den blir naturligtvis oförändrad.

Anm. angående engelska mynten. £ = pund, *s* = shilling, *d* = penny, pence. Betydelsen av förkortningarna: £ = Libra, *s* = solidus, *d* = denarius. Som $1d = 0{,}004\frac{1}{6}$ £, bruka engelsmännen i allmänhet endast uträkna räntan med 3 decimaler. Man har ju då $\frac{1}{4}d = 1$ farthing $= 0{,}001$ £.

Övergång från decimalbråk till *s* och *d*.

$1\,s = 0{,}05$ £, $1\,d = 0{,}004\frac{1}{6}$ £. Lämpligast är att använda tabell

Pence	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Tusendels £	4	8	$12\frac{1}{2}$	17	21	25	29	33	$37\frac{1}{2}$	42	46	50

I vårt exempel blir då räntan £ 5,9178 = £ 5; 18 *s*; 4 *d* eller som man vanligen skriver £ 5. 18. 4. Vore £-siffran 0, skreve man 18/4 för 18 *s*. 4 *d*.

En enkel och allmängiltig metod att bestämma brännvidden för positiva linser eller linssystem.

Av HELMER BÄCKSTRÖM.

När det i skolan gäller att bestämma fokaldistansen för en lins, använder man sig så gott som uteslutande av metoder, vilka äro baserade på den välbekanta formeln för *tunna* linser:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

I praktiken förekomma emellertid mera sällan linser, som äro tillräckligt tunna, för att nämnda formel skall kunna utan vidare tillämpas på sådant sätt som skolan gör. I praktiken möter man i stället linser av utpräglad tjocklek och i regel flera av dem sammanförda till större kombinationer. Det kan vara nog att erinra om de fotografiska objektiven. Säkerligen hava icke så få förutvarande elever försökt utnyttja sina i skolan förvärvade kunskaper i optik till att bestämma konstanterna för sina kamerors objektiv, och säkerligen har resultatet av deras bestämningar i de allra flesta fall blivit ytterst otillförlitligt.

Orsaken till dessa missförhållanden ligger däri, att vi i skolan inlägga annan betydelse i storheterna a och b i formel 1 än som rätteligen tillkomma dem. Med a och b mena vi föremålets, resp. bildens *avstånd från linsen* (linsytan!); med dessa definitioner begränsas formelns användbarhet till det aldrig uppnåeliga gränsfallet, att linsen är »oändligt tunn». Få däremot a och b betyda föremålets, resp. bildens *avstånd från resp. huvudpunkter* hos linsen

eller linssystemet, så blir formeln allmängiltig. Då huvudplanen och linsytorna för en oändligt tunn lins sammanfalla, så försvinner divergensen mellan de båda formeltydningarna för detta fall. Är emellertid linsen tjock, så giva de olika tydningarna av formeln olika resultat, och den av skolan begagnade kan därvid endast betraktas som en grov approximation. Gå vi emellertid till linssystemen, så blir divergensen än större och skolans formel kan leda till resultat, som med hundratals procent skilja sig från de rätta.

Nu kan det knappast vara önskligt, att den i jämförelse till timtalet redan dryga fysikkursen för optikens del utvidgas genom införande av en fullständigare linsteori. Däremot kan det vara skäl att undersöka, huruvida icke bland de metoder, som kunna härledas ur den enkla linsformeln i skolans hittillsvarande tydning, finnes någon, som håller streck även vid användning av riktigare definitioner. Vad vi eftersträva är alltså en metod för brännviddens bestämning, som lämnar tillförlitliga resultat även vid tjocka linser samt linssystem och som därjämte kan härledas medelst formlerna för den *tunna* linsen (d. v. s. skolans tydning av linsformeln).

De hitintills vid skolorna allmänt brukliga metoderna visa sig därvid olämpliga, då de fordra uppmätning av sträckorna a och b eller (vid *Bessels* metod) $a + b$ och $a - b$, vilka storheter ju äro omöjliga att komma åt med måttsticka, så fort vi hava med en tjock lins eller ett linssystem att göra. Emellertid finnes det en metod, sannolikt först angiven av *Abbe*, vilken undgått pedagogernas uppmärksamhet men trots detta utmärkt väl lämpar sig för skolbruk.

När förf. nu går att härleda denna metod, skall han först göra det med utgångspunkt från skolans linsformel, varefter han kommer att visa, att även med de riktigare begreppen samma resultat erhålles.

I fig. 1 må LP betyda en positiv lins, MA ett föremål och EG dess bild, vilken till storlek (b_1) och läge erhålles i enlighet med de vanliga konstruktionerna. Flyttas före-

målet, vars storlek (a) är känd, till läget BN, så förskjutes bilden till läget FH, varvid dess storlek (b_2) även ändras. Drag linjen GK parallell med EF. Av figuren synes nu omedelbart, att $\triangle LCD \sim \triangle HKG$. På grund härav erhålles analogien

$$\frac{LC}{CD} = \frac{HK}{GK}.$$

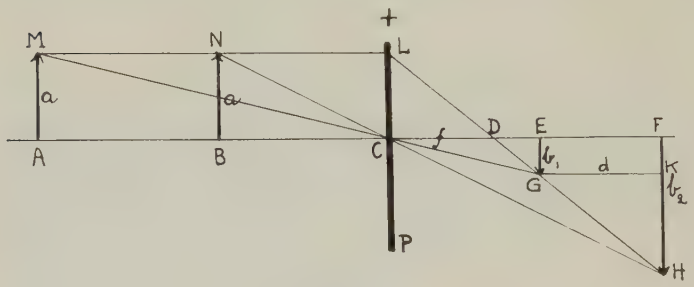


Fig. 1.

Sträckan LC i figuren är emellertid lika med föremålets storlek (a), sträckan CD utgör brännvidden (f), sträckan HK befinnes lika med bildernas storleksdifferens ($b_2 - b_1$) och sträckan GK utgör bildernas avstånd från varandra (d). Vi kunna alltså ersätta det nyss erhållna uttrycket med följande:

$$\frac{a}{f} = \frac{b_2 - b_1}{d} \text{ eller } f = \frac{a \cdot d}{b_2 - b_1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Alla storheterna i denna formel äro lätt uppmätbara och någon osäkerhet på grund av linsens tjocklek förekommer ej.

Tillvägagångssättet vid en mätning torde nu vara i det närmaste självklart. För säkerhets skull har dock en lämplig anordning uppskisserats i fig. 2. GH betyder där en optisk bänk, på vilken objektivet (»linsen») E placerats i godtyckligt läge. »Föremålet» C utgöres kanske bäst av en glasskiva med tvenne horisontella och parallella streck på t. ex. 10 cm avstånd från varandra; glasskivan är fäst

vid en klots[1]. Föremålet belyses av en stark glödlampa (*A*), framför vilken (i närheten av *C*) är uppsatt ett silkespapper e. d. (*B*), som diffuserar ljuset. *F* är ett stycke fast kartong med påklistrat millimeterpapper för bildens uppmätning; den är fäst vid en klots, å vilkens sida ett streck dragits; dettas läge kan avläsas å bänkens skala.

Mätningen tillgår nu sålunda: Klotsen med »föremålet» *C* (fig. 2) placeras på godtyckligt ställe, varefter skärmen *F* förflyttas, tills skarp bild uppfångas å densamma. Läget av *F* avläses härefter å bänkens skala, varjämte bildens storlek avläses å skärmens mm-rutade papper. Därefter placeras »föremålet» *C* i ett nytt godtyckligt läge och be-

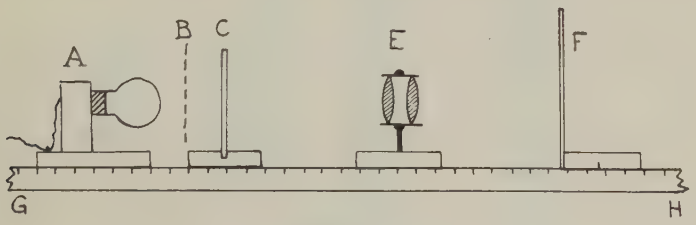


Fig. 2.

stämningen upprepas. Vi hava alltså bestämt tvenne bilders storlekar, b_1 och b_2, samt skärmen *F*:s förskjutning *d* mellan de båda inställningarna. »Föremålets» egen storlek *a* uppmätes direkt på skärmen *C* och alla data för en beräkning av *f* enligt formel (2) äro kända.

Gå vi därefter till en tjock lins eller ett linssystem, så bliva förhållandena tämligen likartade. I fig. 3 har detta fall åskådliggjorts. Enda skillnaden mot fig. 1, som angiver bildernas konstruktion vid en tunn lins, befinnes vara, att linsen, som i fig. 1 markerats med linjen *PL* (utgörande linsen-planets projektion), i fig. 3 måste representeras av tvenne linjer *LP* och L_1P (huvudplanens projektioner).

[1] Ett utmärkt sådant »föremål» erhålles genom att belysa, framkalla och fixera en fotografisk plåt. Denna blir följaktligen fullständigt svart. Medelst en skarp kniv drages därefter de nämnda linjerna i plåtens gelatinskikt; de bliva tydligen vita på svart botten.

För övrigt är allt fullständigt lika i de båda figurerna. Avlägsnas i fig. 3 området mellan huvudplanen LP och L_1P_1 och bringas dessa linjer att sammanfalla, så kommer fig. 3 att övergå i fig. 1. Det torde utan vidare vara klart, att formel (2) lätt kan härledas även ur fig. 3 och att de i formeln ingående storheterna lika lätt uppmätas som nyss. Detta framgår därav, att i formeln förutom de direkt uppmätta storlekarna på föremål och bilder endast ingår *differensen* (d) mellan tvenne bildvidder, vadan huvudplanens lägen ej behöva vara kända.

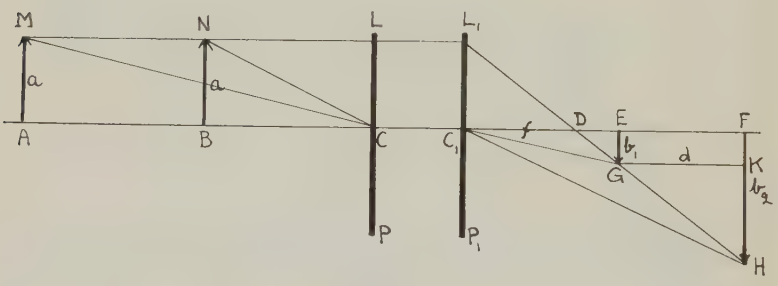


Fig. 3.

Innan resultatet av några verkliga mätningar meddelas, torde det vara lämpligt att med några ord påpeka villkoren, för att stor noggrannhet skall erhållas. Vid betraktande av formel (2) inser omedelbart var och en, som något sysslat med felkalkyler o. d., att den mättekniskt förmånligaste anordningen bör vara den, då samtliga i formeln ingående storheter erhålla lika noggrannhet vid sin uppmätning. Lämpligen väljes därför föremålet av ungefär samma storleksordning som brännvidden, varjämte det ena gången placeras nära och andra gången långt ifrån linsen. Härigenom vinnes, att ett stort avstånd (d) erhålles mellan bilderna och stor olikhet mellan bildernas storlek ernås, d. v. s. $b_2 - b_1$ blir stor och lätt uppmätbar. Av vissa skäl, som nedan skola angivas, får man dock ofta något modifiera vårt första villkor om »föremålets» storlek och välja denna betydligt mindre än här angivits.

Med en anordning, som i allt väsentligt överensstämde med den i fig. 2 åskådliggjorda, utfördes en serie bestämningar av ett fotografiskt objektivs brännvidd. Det använda objektivet var en Rodenstocks »bistigmat» av cirka 20 cm brännvidd; det var uppmonterat i en kamera, varför dennas mattskiva fick ersätta skärmen F i fig. 2. De erhållna värdena äro samlade i följande tabell, vars alla storheter äro angivna i mm.

d	b_2	b_1	Brännvidd (f)
163,2	91,1	12,2	207,0
144,9	91,1	21,0	206,7
130,1	91,1	27,7	205,1
109,2	65,0	12,2	206,8
102,1	61,4	12,2	207,5
100,6	91,1	42,6	207,4
90,9	65,0	21,0	206,6
83,8	61,4	21,0	207,4
76,1	65,0	27,7	204,0
69,0	61,4	27,7	204,7
62,6	42,6	12,2	205,9
61,1	91,1	61,4	205,7
46,6	65,0	42,6	208,0
44,3	42,6	21,0	205,0
39,5	61,4	42,6	210,0
33,1	27,7	12,2	213,5

Överensstämmelsen mellan de erhållna värdena på brännvidden måste betraktas som utomordentligt god, i synnerhet i anseende till försöksbetingelserna, som icke alltigenom voro de bästa. Som föremål hade använts en skärm med tvenne parallella linjer på 10 cm avstånd; det dubbla hade måhända varit bättre. Viktigare är emellertid, att avstånden mellan bilderna i allmänhet blivit väl knappt tilltagna, varigenom felens inflytande ökats. I tabellen hava de olika försöken ordnats efter fallande d-värden; försökens noggrannhet bör avtaga parallellt härmed. En blick på tabellen visar oss, att så även är fallet; variationerna i f-värdena tilltaga i stort sett nedåt. Anmärkningsvärt är emellertid,

att osäkerheten vid de sista bestämningarna ej blivit större; detta visar, huru tillförlitlig metoden verkligen är. Medeltalet av de åtta första bestämningarna är 206,8 $\pm$ 0,3 mm och medeltalet av de åtta senare 207,1 $\pm$ 1,1 mm. Ökad noggrannhet i de enskilda brännviddsbestämningarna kunde naturligtvis erhållits, om varje bildinställning utförts flera gånger och medeltalen för de därvid gjorda avläsningarna använts för beräkningen. Upprepade avläsningar äro ju önskvärda vid alla slags mätningar, men knappast på något område märker man vinsten av dem så lätt som vid optiska försök.

För en del år sedan angav förf. en för fotografer avpassad version av den här rekommenderade metoden.[1] Då fotografer ofta på grund av ringa matematiska förkunskaper hysa en intensiv motvilja mot alla matematiska manipulationer, använde förf. sig därvid av en grafisk metod för brännviddens bestämning. Det då publicerade förfaringssättet var följande:

Objektivet, som skall undersökas, förutsättes uppmonterat på en kamera, vilken inriktas mot ett papper (*a* i fig. 4).

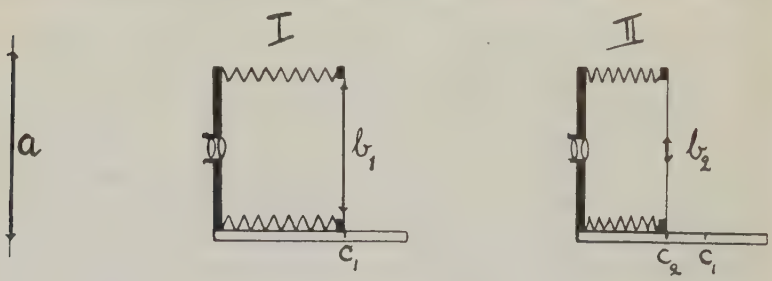


Fig. 4.

På detta papper hava två parallella linjer dragits, t. ex. på 1 dm avstånd från varandra. Kameran inställes på nära håll (läge I), så att bilden blir fullt skarp på visirskivan, och där uppmätes avståndet mellan de båda strecken (b_1). Samtidigt göres på kamerabrädet ett märke (c_1) mittför

[1] Nordisk tidskrift för fotografi, 1919, sid. 160—163.

någon kant e. d. å kamerans förskjutbara del. Detta gäller likaväl, antingen kamerafronten eller visirskivan är förskjutbar. Kameran inställes därefter på något längre avstånd (läge II) från papperet och bildstorleken (b_2) bestämmes som förut. Även i denna ställning göres ett märke (c_2) å kamerabrädet och avståndet mellan c_1 och c_2 uppmätes.

När detta är gjort, tager man det förut omtalade papperet och avsätter å den undre linjen en sträcka lika stor som kameraförskjutningen c_2c_1 (se fig. 5), uppdrager från dess

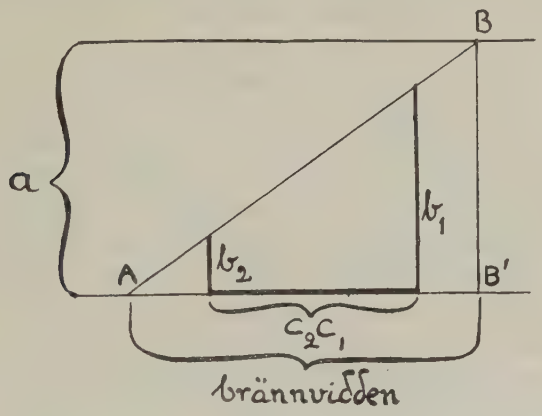


Fig. 5.

ändpunkter två vinkelräta linjer b_2 och b_1, till storlek lika de uppmätta bilderna, sammanbinder deras toppunkter och utdrager sammanbindningslinjen, tills den träffar papperets ursprungliga linjer i A och B. Från den övre av dessa skärningspunkter (B) drages en linje vinkelrätt mot den nedre horisontella linjen, som den träffar i B'. Sträckan AB' är objektivets brännvidd, vilken alltså kan uppmätas med en måttsticka.

Metoden i denna form har visat sig väl fylla sitt ändamål. Naturligtvis kan den grafiska beräkningsmetoden även tillämpas på anordningen i fig. 2, men den synes mig obehövlig för gymnasialstadiet, där en så enkel formel som den här angivna knappast kan förorsaka svårigheter.

När det gäller noggranna brännviddsbestämningar, kan vår metod under vissa omständigheter leda till mindre goda resultat. Det torde vara tämligen känt, att med många linser erhållas bilder, som väl kunna vara fullt korrekta inom ett ringa område i närheten av optiska axeln men som utåt få felaktiga proportioner. Då nu bildens dimensioner användas vid brännviddens beräkning, så torde det vara ganska självfallet, att osäkra värden erhållas, så fort de uppmätta bilderna äro något så när stora. För alla apparater med stort bildfält äro linser av ovan antytt slag mindre lämpliga, och man kan för deras räkning säga, att ju större detta fel är, desto mindre behov har man i allmänhet av en noggrann angivelse av brännvidden. Så är t. ex. fallet vid de fotografiska kamerornas objektiv. Men det finnes instrument, där endast ringa bildfält utnyttjas och det längre ut liggande bildområdets felaktigheter sålunda sakna betydelse. — Dit kan bl. a. räknas vissa kikartyper. — För dessa instrument är det tydligen ej tillåtet, att objektivens brännvidder bestämmas genom uppmätning av *stora* bilder.

För att komma ifrån detta fel och göra metoden brukbar som precisionsmetod har förf. vid laborationsförsök å Tekniska Högskolan, där han under många år tjänstgjorde som assistent i fysik, låtit eleverna använda sig av »föremål» av endast 1 mm storlek.[1] Därigenom nedbringas bildernas storlek till det minsta möjliga och uppmätningen av dem måste därför ske med okularmikrometer eller koordinatmikroskop. Det är tydligt, att med de minimala bildvinklar, som härvid användas, det nämnda felet kommer att utebliva.

Innan denna uppsats avslutas, vill förf. påpeka möjligheten av att bestämma brännvidden för olika våglängdsområden genom att under mätningarna hava placerat ett ljusfilter vid *B* i fig. 2. Vid laborationerna å Tekniska

[1] Mest användes en mm-skala av glas, varvid en skaldel fick tjänstgöra som »föremål».

Högskolan användas härför trenne ljusfiltra,[1] egentligen avsedda för trefärgsfotografering, vilka uppdelade det synliga spektralområdet i tre delar. Varje ljusfiltrum bestod av tvenne glasskivor, mellan vilka en färgad gelatinfolie placerats. Genom begagnande av sådana filtra erhåller man ett gott begrepp om den kromatiska aberrationen, som yttrar sig däri, att de olika ljussorterna giva olika bildpunkter och sålunda även olika brännvidder.

[1] De voro tillverkade av docent J. Hertzberg. Likartade filtra torde även finnas i handeln.

Värmets mekaniska ekvivalent.

Av E. FOGHAMMAR.

Att genom enkla försök visa, att arbete kan omvandlas i värme, erbjuder ju ingen svårighet. Lärjungarna ha väl för övrigt i allmänhet kännedom om denna sak genom egen erfarenhet, en liten handcykelpump kan bli alldeles het, då de skola pumpa upp cykelringarna, ett dåligt smort lager går varmt o. s. v. Det är däremot en ganska omständig sak att kvantitativt visa sambandet mellan den använda arbetsmängden och det bildade värmet. På fysiklaborationerna i andra ringen göres försöket i allmänhet så, att blyhagel få falla i papprör av c:a 1 meters längd och med korkar i ändarna, varav den ena är löstagbar. Om man låter blyhaglens begynnelsetemperatur vara lika mycket under rumstemperaturen som sluttemperaturen blir över, så är resultatet användbart, fastän många felkällor kvarstå, som göra, att det dock blott kan bli fråga om ett synnerligen osäkert värde. En sak, som är särskilt svår att få rätt, är fallhöjden, ty om blyhaglen få börja falla, innan man fått röret lodrätt, blir den för liten, och om man sänker eller höjer röret under fallet, blir den för stor eller för liten respektive. Röret självt kan ju dessutom ta till sig en hel del värme, som rätteligen skulle stanna hos blyhaglen, och detta gäller särskilt för papprör, som använts mycket och som äro impregnerade med blydamm.

För att få en så mycket som möjligt riktig fallhöjd har undertecknad låtit blyhaglen falla direkt inneslutna i en tygpåse. Påsen var gjord av starkaste tyg, som kunde anskaffas (avsett till bolstervar), och sömmarna sydda med särskilt stark tråd. Den färdiga påsens längd var 20 cm och bredd 12 cm. Dess vikt var c:a 25 gr. För att ingen

uppvärmning från handen skulle kunna komma till blyhaglen, när påsen lyftes, hade dessutom fästs ett 12 cm långt tyghandtag med ena ändan intill botten och med den andra 8 cm från dess överkant.

Vid mina försök har jag fått bästa resultatet med 3 kg bly i påsen. Haglen voro c:a 3 mm i genomskärning. För att påsen ej så småningom skall spricka sönder, har jag använt en fallhöjd av blott 1 m. Efter första fallet lyftes påsen omedelbart åter till 1 meters höjd och får falla på nytt. För att energien helt skall stanna hos blyhaglen, böra de falla på fasta golvet, trägolv ger i allmänhet lika bra resultat som stengolv. Vid mina försök enligt tabell 1 har jag låtit begynnelsetemperaturen vara densamma som rumstemperaturen. Sedan begynnelsetemperaturen avlästs på hundradels grader, hopbindes påsen så, att blyhaglen få god plats att rulla fram och tillbaka inom den. Lämpligast såsom total fallhöjd har 20 m visat sig vara. Före slutavläsningen bör man med handen uppvärma termometerkulan till ungefärligen den temperatur, man väntar. Termometerkulan placeras naturligtvis så mycket som möjligt i mitten av blyhaglen, men det är olämpligt att mellan avläsningarna flytta den, ty då kan den på grund av den genom rivningen utvecklade värmen stiga flera tiondels grader. Med förvärmning av termometerkulan tar det någon minut innan kvicksilverpelaren stannar vid det värde, som man avläser och som sedan bibehålles ytterligare omkring 10 minuter. Därefter börjar termometern sjunka, först mycket långsamt, sedan raskare. Om man före nedsänkningen i blyhaglen ej förvärmer termometerkulan, erhålles dock ett nästan lika gott värde, men det tar längre tid, innan man kan göra slutavläsningen, och temperaturen faller sedan nästan genast åter. Att värdena bli så mycket sämre för fallhöjden 40 m, beror tydligen därpå att utstrålningen och ledningen äro kraftigare vid den temperaturdifferens, som därvid uppkommer, helst som de största förlusterna därvidlag uppstå, medan påsen får falla, och tiden för detta tillfälle måste bliva dubbelt så

lång som då man har 20 m. Att felkällan i värdena för 30 och 40 m ligger i utstrålningen och ej i eventuella avläsningsfel visar tabell 1, som för de två försöken å samma höjd visar sinsemellan mycket överensstämmande värden.

Tabell 1.

Blyhaglens begynnelsetemperatur	15°,97	16°,53	16°,19	16°,72	16°,17	16°,41
Antal fall å 1 m	20	20	30	30	40	0
Blyhaglens sluttemperatur	17°,44	18°,03	18°,26	18°,76	18°,61	18°,88
A = uträttat arbete i kilogrammeter	60	60	90	90	120	120
W = utvecklat värme i kilogramkalorier	0,032 · 1,47 · 3	0,032 · 1,5 · 3	0,032 · 2,07 · 3	0,032 · 2,04 · 3	0,032 · 2,44 · 3	0,032 · 2,47 · 3
A/W	425	417	453	459	512	506

Om man icke har tillgång till termometrar, som äro graderade i tiondels grader, kan man ju även här från början avkyla blyhaglen, såsom man brukar göra, då man använder papprören, men för att resultatet skall bliva gott, måste man väl omskaka dem innan de hällas i påsen, så att alla blyghaglen få exakt samma temperatur. Tabell 2 visar en försöksserie i enlighet med denna anordning.

En viktig sak vid beräkningarna är, att man tager rätt värde å spec. värmet för de blyhagel, som man använder. Man brukar ju vanligen räkna med värdet 0,031, men när blyhaglen varit med en tid, överdraga de sig med blysuboxid, som har ett högre värde för spec. värmet (c:a 0,041), och det damm, som hastigt bildas bland blyhaglen, består också huvudsakligen av blysuboxid. Vid mina beräkningar har jag därför tagit värdet 0,032, då blyhaglen äro gamla och mycket använda. Skall man vänta sig ett medelvärde å värmets mekaniska ekvivalent, som är rätt på 1 à 2 enheter när, måste ju dock blyhaglens spec.

Tabell 2.

Blyhaglens begynnelsetemperatur	13°,5	12°,4	11°,5	9°,3
Rumstemperaturen...	15°,7	15°,8	15°,4	14°,4
Antal fall å 1 m. ...	60	90	100	120
Blyhaglens sluttemperatur	17°,9	18°,9	19°,0	18°,1
A = uträttat arbete i kilogrammeter ...	180	270	300	360
W = uträttat arbete i kilogramkalorier...	0,032 · 4,4 · 3	0,032 · 6,5 · 3	0,032 · 7,5 · 3	0,032 · 8,8 · 3
A/W	426	433	417	426

värme vara känt med ännu en decimal. Om man ej utför denna bestämning, får man alltså vara nöjd om medelvärdet ligger inom gränserna 415—440. Då blyhaglens spec. värme av ovannämnda skäl med åren förändras, måste man varje år företaga en noggrann bestämning av spec. värmet, om man vill ha det teoretiskt fullt rätta värdet.

Försöket har även utförts med sand[1] (c:a 7 hg i påsarna), och även då blir resultatet gott, om totala fallhöjden är högst 100 m. Här äro emellertid svårigheterna vid avläsningen större, ty termometern behöver en betydligt längre tid för att inställa sig.

Man får naturligtvis se till, att värme under försöket ej kommer till blyhaglen från obehörigt håll eller att värme ej förloras. Försöket får därför ej göras i närheten av kakelugn, värmeledningselement eller intill dragiga fönster och dörrar. Solen får ej heller skina in i rummet.

För den, som vill göra försöket enligt tabell 2, finnas många goda råd i en artikel av lektor Otto Gallander i »Svanströms meddelanden n:r 1».

Högre Latinläroverket i Göteborg d. 30 jan. 1926.

[1] Små kullagerkulor lämpa sig väl för detta försök. *Red:s anm.*

Om den Dopplerska principen.

Av C. A. SCHULTZ-STEINHEIL.

I decemberhäftet 1924 av denna tidskrift har lektor A. Meyer en uppsats om Dopplers princip. Då jag först gav mina elever bevis för denna sats, hade jag en framställning liknande den Meyerska, men jag fann, att eleverna visserligen i allmänhet utan större svårighet kunde följa tankegången, men att det var dem omöjligt att i en examen kunna komma ihåg beviset, varför jag ändrade det till följande, som är mycket lätt att minnas och enligt min uppfattning är fullt klart. För bättre översikts skull lämnas först den rent mekaniska räkningen; förklaringen följer sedan.

Vi ha en ljudkälla, som utsänder vågor, och en person ett stycke därifrån, som uppfattar dem.

H	n	λ	τ
$H+p$	n_1	$\lambda - k\tau$	τ_1

$$H = n\lambda \quad \ldots\ldots\ldots (1) \qquad n\tau = 1 \quad \ldots (2)$$

$$H+p = n_1(\lambda - k\tau) \quad \ldots (3) \qquad n_1\tau_1 = 1 \quad \ldots (4)$$

Insätter man i (3) värdena på λ och τ ur (1) och (2) fås

$$n_1 = \frac{H+p}{H-k} \cdot n \quad \ldots (5).$$

Första raden förutsätter, att ljudkällan och personen båda äro orörliga.

$H\ ^{\mathrm{m}}/_{\mathrm{sek}}$ = ljudets hastighet; n = sv. talet; λ m = våglängden och τ sek = sv. tiden. Man får de vanliga ekvationerna (1) och (2).

Andra raden förutsätter, att ljudkällan och personen röra

sig mot varandra, källan med hastigheten $k\,^{m}/_{sek}$ och personen med $p\,^{m}/_{sek}$.

$H+p$ är ljudets skenbara hastighet. Den hastighet H, med vilken ljudet fortskrider i luften, är oberoende av källans hastighet, ty sedan källan satt närmaste luftpartikel i rörelse, fortskrider vågen i luften utan källans hjälp. Rör sig nu personen mot vågen med hastigheten p, närmar sig vågen personen med en ökad hastighet $H+p$.

τ_1 är tiden, som förflyter från det örat träffas av en viss fas av vågen, tills det nästa gång träffas av samma fas.

n_1 är antalet gånger örat träffas av en och samma fas under loppet av en sekund.

Ur dessa definitioner på τ_1 och n_1 fås ekv. (4) på samma sätt som ekv. (2).

$\lambda - k\tau$ är den skenbara väglängden, d. v. s. avståndet mellan två punkter med samma fas på sträckan mellan källan och personen. Det är till en början tydligt, att denna våglängd icke har något med personens hastighet att göra utan endast beror av luften, som fortplantar vågen, och av källan, som alstrar den.[1] Källan alstrar i ett visst ögonblick i luften en viss fas av vågen; denna fas har efter τ sek fortskridit λ m; då alstrar källan ånyo samma fas, men som källan under tiden följt med $k\tau$ m, blir avståndet mellan två punkter med samma fas $\lambda - k\tau$ m. Dessa lika faser fortskrida mot personen med bibehållande av sitt inbördes avstånd. På en sekund har örat träffats av n_1 sådana (enl. def. på n_1). Sammanlagda längden av dessa är $n_1(\lambda - k\tau)$, som sålunda utgör den skenbara vågens väg per sek, d. v. s. hastigheten, som nu är $H+p$. Således fås ekv. (4).

Om $k=H$, blir enl. (5) $n_1=\infty$ och således enl. (4) $\tau_1=0$, d. v. s. stötarna följa omedelbart på varandra. Om $k>H$, blir enl. (5) n_1 neg. och således enl. (4) τ_1 neg., d. v. s. den sista stöten kommer först. Skulle $p=-k$, blir enl. (5) $n_1=n$.

[1] Det blir samma våg, om personen är borta.

Om enheterna för kraft och massa.

Av HENRIK PETRINI.

På senare tid har man yrkat på en mer enhetlig framställning av enheterna för kraft och massa än den hittillsvarande utan att vid undervisningen ändå behöva gå ifrån de praktiska enheterna. Man har enats om att låta ordet »vikt» beteckna en massa men »tyngd» en kraft; ett kilogram betecknar då uteslutande en massenhet, medan motsvarande enhet för kraft skall kallas »kilogramkraft» och tecknas »kgf». Så långt är allt gott och väl, och det nya systemet har med fördel tillämpats i två nya läroböcker i statik av Ohlon och Moll-Rudberg.

Men i fråga om dynamiken har i Moll-Rudbergs lärobok dubbelheten kommit tillbaka: vad man vann i statiken, förlorade man i dynamiken. Rudberg trasslar nämligen till begreppen genom att införa två enheter för massa, en, som gäller i statiken, och en, som han vill ha in i dynamiken. Det nya enhetssystemet måste dock genomföras konsekvent, och därför tar jag mig friheten varna lärarna i fysik i högsta ringen för att låta pojkarna läsa de paragrafer, där termen »dynamisk massa» är införd. Till dess rättelse sker, kan man ersätta dessa paragrafer (§§ 24 och 25) med att låta eleverna i dynamiken alltid beteckna massan med $\frac{p}{g}$, där p är kroppens tyngd, uttryckt i kgf, och tills vidare avstå från någon närmare utredning av saken.

Orsaken till oredan är följande. Om man bestämmer en fysisk enhet genom att i en formel sätta en proportionalitetskonstant = 1, så kallas de i formeln förekommande storheternas enheter för *motsvariga*. Men väljer man sedan

andra enheter, som icke äro motsvariga, så blir konstanten ej längre = 1. Som exempel må användas formeln

$$(A) \quad \ldots \ldots \ldots \quad k = ma,$$

som är exakt, om k räknas i dyn, m i gram och a i cm/sek^2. Men räknas m i kilogram och de andra enheterna bli oförändrade, så måste man skriva

$$k = 1\,000ma.$$

Nu är den nya enheten 1 kgf *icke* motsvarig till 1 kg, och därför får man icke använda formeln (A), utan man måste ha en proportionalitetsfaktor c med och skriva

$$(B) \quad \ldots \ldots \ldots \quad k = cma,$$

där k är uttryckt i kgf och m i kg. För bestämning av c låta vi k beteckna en kropps tyngd och sätta

$$k = p \text{ kgf}.$$

Då blir massan $= p$ kilo och accelerationen $a = g$. Av (B) fås

$$p = cpg,$$

$$\therefore \; c = \frac{1}{g}.$$

Vid användning av de oemotsvariga enheterna kgf och kg måste därför ekvationen (A) ersättas med

$$(C) \quad \ldots \ldots \quad k = \frac{1}{g} ma.$$

Om nu en kropps tyngd är p kgf, så är dess massa $m = p$ kg, och formeln (C) övergår till den gamla vanliga

$$k = \frac{p}{g} \cdot a.$$

*

I samband härmed må några ord sägas om begreppet specifik vikt. Ett ämnes specifika vikt är ett abstrakt tal, som är oberoende av valet av enheterna, vare sig man

räknar i kilogram eller skålpund, i liter eller engelska kubiktum. Från synpunkten av de fysiska enheterna är därför den vanliga formeln

$$a = sv,$$

där a är absoluta vikten, s specifika vikten och v volymen, alldeles vilseledande, då den ju ger åt specifika vikten dimensionerna

$$\frac{m}{L^3} \quad C. \; G. \; S.$$

Det vore därför önskligt, om läroboksförfattarna ville införa den exakta definitionen på specifik vikt, som kan uttryckas i formeln

(1) . . . . . $m = sm_0,$

där m är kroppens massa och m_0 är massan av en lika stor volym vatten. Formeln (1) kan då kompletteras med påpekandet, att i vissa lämpligt valda enheter för m och v man har formeln

(2) . . . . . $m_0 = v,$

där man ej riskerar, att formeln (2) missförstås därhän, att begreppet massa fattas såsom identiskt med begreppet volym.

Anm. till föreg. uppsats.

Med ett tack till redaktionen för dess vänlighet att låta mig få del av lektor Petrinis anmärkningar får jag på den första, rörande kraftekvationen, blott säga, att den tankegång, lektor P. här skisserat, så långt ifrån varit mig främmande, att jag tvärtom började slå in på den vägen i min framställning men ryggade tillbaka vid tanken på den villervalla, ett eventuellt införande av konstanten $\frac{1}{g_{45}}$ skulle

vålla eleverna vid räkning av de dynamiska problem, som förekomma i våra vanliga exempelsamlingar, där massa ej tages i betydelsen av vikt.

T. R.

Den av lektor Petrini förordade gamla definitionen på spec. vikt strider mot den användning, ordet specifik fått inom andra delar av fysiken. Med specifikt tryck menas alltid trycket per ytenhet (mätes i kgf/cm^2), spec. volym är volymen av viktsenheten (mätes i t. ex. cm^3/g), specifikt ledningsmotstånd motståndet per $meter/mm^2$ etc.

Definieras i överensstämmelse härmed spec. vikt som vikten av volymsenheten, och mätes den således i g/cm^3, kg/dm^2 o. s. v., får man behålla den pedagogiskt värdefulla relationen: abs. vikten = spec. vikten $\times$ volymen samt har direkt nytta av räkneövningar på spec. vikt, då man kommer till andra specifika storheter.

O. G—r.

Atomteoriens tillämpning på kemiska problem.

Av G. STARCK.

Bohrs atomteori var, då den uppställdes, en rent fysikalisk teori. J. J. Thomson uppställde år 1904 den hypotesen, att grundämnenas atomer äro uppbyggda av elektroner, fördelade inom en positiv laddning, som fyller hela atomens volym och är lika stor som elektronernas sammanlagda laddning. Denna uppfattning måste övergivas, då Rutherford år 1911 visade dess oförenlighet med α-partiklarnas spridning vid genomgången av materie, t. ex. guldblad. I stället måste man enligt Rutherford föreställa sig, att den positiva laddningen, i stället för att vara diffust utbredd över hela atomen, är bunden vid en central kärna av samma storleksordning som elektronen, och att denna kärna omges av ett antal elektroner, som neutralisera kärnans laddning. Rutherford kunde också angiva kärnladdningens storlek, resp. elektronernas antal, som enligt honom är $= {}^1/_2$ atomvikten. van den Broek och (1913) Moseley visade, att laddningens storlek är = atomnumret, d. v. s. grundämnets nummer i det periodiska systemet. På Rutherfords och Moseleys arbeten, på läran om spektralserier och på kvantteorien uppbyggde Bohr den nu gällande atomteorien. I sina allmännaste drag innehåller denna, att grundämnenas atomer äro uppbyggda av massbesittande kärnor, positivt laddade, omkretsade av elektroner, så många som atomnumret anger. Elektronerna kunna övergå från en bana till en annan, och härvid emitteras eller absorberas en spektrallinje, som kan beräknas ur atomens konfiguration och återfinnes i elementets spektrum.

Den närmaste utvecklingen av atomteorien tog framför allt fasta på sambandet mellan atomens byggnad och dess spektrum, d. v. s. dess fysikaliska innehåll. Men naturligtvis är atomteorien eller borde vara av ett utomordentligt stort intresse även för kemien. Då man har en så ingående kännedom om atomernas byggnad, som fallet nu är, bör man hava rätt att vänta, att denna kännedom skall avsätta frukter även på det rent kemiska området. Vi känna enligt Bohr låt oss säga väteatomens och i vissa huvuddrag kloratomens strukturer. Frågan är då, om dessa strukturer ge oss förklaringen ej blott till vätets och klorens spektra, utan till vad vi veta om hur väte och klor reagera och till den uppkommande föreningens egenskaper. Man kan inte säga, att man har hunnit särdeles långt på denna väg, atomteorien är ett svårhanterligt redskap, vars handhavande erbjuder svårigheter redan för fysikerna. Sambandet mellan atomernas konstitution och grundämnenas periodicitet har länge varit klar och många andra samband mellan struktur och egenskaper, men därifrån är steget långt till målet: en uttömmande förklaring, grundad på atomstrukturen, av grundämnenas kemi.

De första, grundläggande arbetena på att tillämpa atomteorien inom kemien utfördes av W. Kossel (1916) och samtidigt av N. G. Lewis. Enligt Kossel beror grundämnenas benägenhet för jonbildning på elektronhöljets strävan att genom elektronförlust eller -komplettering bilda särskilt stabila konfigurationer. Sådana stabila konfigurationer tillkomma framför allt ädelgaserna fr. o. m. neon, vilka i det yttersta elektronskalet hava 8 elektroner. I överensstämmelse härmed sträva de grundämnen, som i det periodiska systemet komma närmast före en ädelgas, att genom upptagande av elektroner komplettera det yttre elektronskalet och därigenom övergå till negativt laddade joner, de, som komma efter en ädelgas, avgiva det antal elektroner, som kräves, för att ett ädelgasskal av 8 elektroner skall uppkomma. Samma elektronkonfiguration som neon tillkomma således följande joner:

N^{3-}, O^{2-}, F^-, Ne, Na^+, Mg^{2+}, Al^{3+}, elektronanordning 2, 8.

Samma elektronantal som argon hava

P^{3-}, S^{2-}, Cl^-, A, K^+, Ca^{2+}, Sc^{3+}, elektronanordning 2, 8, 8.

En annan stabil elektronanordning är den, som karakteriseras av ett yttersta elektronskal med 18 elektroner. Denna konfiguration hava exempelvis jonerna Cu^+, Zn^{2+}, Ag^+, Cd^{2+}, In^{3+}. Vi komma således till det resultatet, att det finnes ett mycket begränsat antal jontyper, om man tänker på elektronhöljets byggnad. Enligt Grimm kan man indela atomjonerna på följande sätt:

1. Joner med 0 elektroner i yttersta skalet (H^+),
2. Joner av *He*-typ med 2 elektroner i yttersta skalet,
3. » » ädelgas-typ (*Ne*, *A*, *Kr*, *X*, *Em*) med 8 elektroner i yttersta skalet,
4. Joner av Cu^+-, Ag^+-, Au^+-typ med 18 elektroner i yttersta skalet,
5. Joner av Mn^{2+}-, Fe^{2+}-, Co^{2+}-, Ni^{2+}-typ (övergångsjoner) med ofullständigt yttre skal,
6. De sällsynta jordarternas joner med ofullständigt innerskal och konstant antal yttre elektroner,
7. Joner av Tl^+- och Pb^{2+}-typ, antagligen med 20 ytterelektroner.

Till dessa grupper höra följande joner.

	Konfiguration.	
1.	0	H^+
2.	2	He, Li^+, Be^{2+}, B^{3+}, C^{4+}
3.	2, 8	Ne, N^{3-}, O^{2-}, F^-, Na^+, Mg^{2+}, Al^{3+} . . .
	2, 8, 8	A, P^{3-}, S^{2-}, Cl^-, K^+, Ca^{2+}, Se^{3+} . . .
	2, 8, 18, 8	Kr, Se^{2-}, Br^-, Rb^+, Sr^{2+}, Y^{3+} . . .
	2, 8, 18, 18, 8	X, Te^{2-}, J^-, Cs^+, Ba^{2+}, La^{3+} . . .
4.	2, 8, 18	Cu^+, Zn^{2+}, Ga^{3+}
	2, 8, 18, 18	Ag^+, Cd^{2+}, In^{3+}
	2, 8, 18, 32, 18	Au^+, Hg^{2+}, Tl^{3+}

	Konfiguration.	
5.	2, 8, 14	Mn^{2+}
	2, 8, 15	Fe^{2+}
	2, 8, 16	Co^{2+}
	2, 8, 17	Ni^{2+}
6.	2, 18, 16, 9	Ce^{3+}
7.	2, 8, 18, 32, 20	Tl^{+}

Visserligen hava jonerna inom en grupp (t. ex. *Ne*-gruppen) samma antal elektroner, ordnade på samma sätt, men därav följer ej, att de äro lika. Den positiva kärnladdningen växer med en enhet för varje steg, och den första följden härav blir en minskning av jonradien, eftersom en ökning av den centrala laddningen måste medföra en sammandragning av elektronbanorna. Jonvolymen bör således minskas i de ovan uppskrivna horisontalraderna. Fajans har gjort en beräkning av jonradierna under förutsättning av att de 8 elektronerna sitta i hörnen av en kub och på grundval vidare av de på röntgenspektrografisk väg bestämda gitteravstånden i alkalihalogeniderna, och får då också till resultat, att t. ex. $F^- > Na^+$, $Cl^- > K^+$, $Br^- > Rb^+$, $J^- > Cs^+$, men också, att skillnaden i radie blir mindre med växande laddning, såsom är att vänta. Förutsättning är också, att jonerna i kristallgittret icke äro tätt packade, ej beröra varandra, ty räknar man ut atomradierna ur denna förutsättning och under förutsättning av konstanta atomradier (ett villkor, som är uppfyllt i fråga om alkalihalogenider) kommer man till ett rakt motsatt resultat, nämligen att $Na^+ > F^-$ o. s. v.

Saltartade föreningar komma till stånd genom förening av joner, vilka bindas av elektrostatiska attraktionskrafter mellan de olika laddade jonerna. Man kan då framställa den frågan, om vid en förening av 2 joner till en molekyl jonerna bibehålla den storlek och elektronanordning, som de hava i fritt tillstånd, eller om de undergå någon förändring. Denna förändring kan tänkas träffa såväl elektronernas antal i de olika skalen som banornas form. Den

första möjligheten kan i allmänhet uteslutas. Den andra har på senare tid sysselsatt särskilt Fajans i München, och redogörelsen för hans åsikter på denna punkt skall utgöra det väsentliga av denna uppsats.

Enligt Fajans äger vid bildningen av en heteropolar förening (en förening av motsatt laddade joner) en formförändring, en deformation av jonen rum, som yttrar sig däri, att elektronbanorna och särskilt de yttre elektronbanorna ändra form under inverkan av den andra jonens elektriska fält. Med denna elektronbanornas formförändring följer naturligtvis också en ändring av jonens volym.

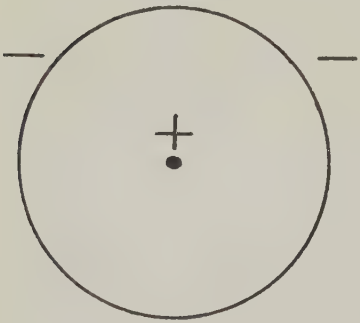


Fig. 1.

På grund av det förut nämnda är det till att börja med klart, att det företrädesvis måste vara de negativa jonerna förbehållet att undergå någon starkare deformation; dessa joner äro stora och deras kärnladdning visar ett underskott gentemot elektronhöljet, varför detta kan sägas vara svagt struerat. De positiva jonerna äro däremot små, deras elektronhölje påverkas av en överskjutande kärnladdning och bör hava en fast struktur. Vidare bör en större anion vara lättare deformerbar än en mindre, och av 2 anioner med samma antal elektroner bör den, som har den mindre kärnladdningen, vara mera deformerbar. Det blir således väsentligen så att kationerna åstadkomma anionernas deformation, medan den motsatta effekten blir av underordnad betydelse.

En fri, gasformig anion har det utseende, som antydes av fig. 1, där cirkeln är det yttersta elektronskalet och den negativa överskottsladdningen, men icke laddningarnas verkliga storlek, är angiven. Närmar sig en positiv jon, attraheras det negativa höljet, så att den positiva laddningen får ett excentriskt läge och jonen blir polariserad, övergår till en dipol och får ett elektriskt moment. Samma

förändring inträffar givetvis också med den positiva jonen. Samtidigt äger av samma skäl en formförändring rum av elektronbanorna, av elektronhöljet, som drages ut i riktning mot den positiva jonens överskottsladdning. Fajans stöder detta antagande på jämförande betraktelser över de kemiska föreningarnas egenskaper, såsom bildningsenergi, molekylarrefraktion, löslighet, komplexbildning, färg, flyktighet, m. m.

Om dessa betraktelser kan man inledningsvis anmärka, att de med nödvändighet äro av mer kvalitativ än kvan-

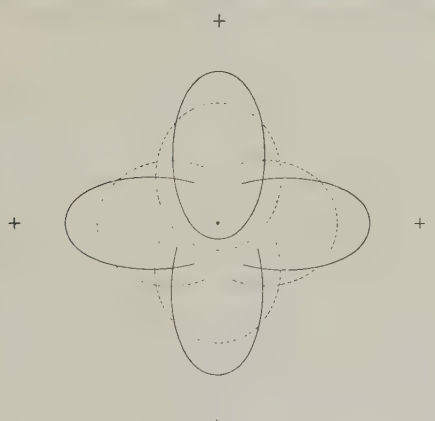


Fig. 2.

titativ art. Förhållandena i atomen äro så komplicerade, att om det redan är svårt att ange strukturen av en fri jon, så är den fysikaliska eller matematiska beräkningen av dess tillstånd i ett elektriskt fält för närvarande ogörlig. Det hela blir därför onekligen litet löst. Born och Landé hava dock nyligen (Z. Physik *23*, 388; 1924) behandlat problemet matematiskt.

Vi skola först behandla deformationens samband med *molekylarrefraktionen.*

a) Ensidig polarisation i homogent och inhomogent fält. Som vi nyss sett, blir i ett homogent elektriskt fält av en kondensator den neutrala atomen polariserad. Om man

nu ersätter kondensatorn med en ljusstråle, så polariseras atomen av ljusvågens elektriska fält; å andra sidan blir ljusstrålens hastighet härvid förminskad, ljuset brytes. Mellan den konstant α, som anger graden av atomens polarisering och ljusets brytningsexponent (för oändligt långa vågor) består sambandet

$$\alpha = \frac{3}{4\pi N} \times \left(\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \times V \right) = \frac{3}{4\pi N} \times R,$$

där V är molekylarvolymen, N det Loschmidtska talet, $(6{,}06 \times 10^{23})$ R molekylarrefraktionen. Denna senare är alltså ett mått på atomens deformation. Samma resonemang gäller också för en jon, ehuru här finnes en överskottsladdning.

Åtskilliga forskare (Wasastjerna, Fajans och Joos, Born och Heisenberg) hava på olika vägar kunnat beräkna molekylarrefraktionen för fria, gasformiga joner. En antydan om den av Fajans inslagna vägen må här lämnas. Experimentellt givna äro mol.-refraktionerna för ädelgasernas atomer, vidare mol.-refraktionerna för alkalihalogeniderna i oändligt utsp. lösning, d. v. s. summan av refraktionsvärdena för alkalijon och halogenjon.

Om vi i det närmast följande beteckna refraktionerna med jonernas kemiska tecken, känna vi således, att

$$Ne = 1{,}00,$$
$$F^- + Na^+ = 3{,}00.$$

Nu bör gälla (på grund av att alla jonerna hava samma antal elektroner, men från F^- till Na^+ stigande positiv laddning)

$$\frac{F^-}{Ne} > \frac{Ne}{Na^+},$$

d. v. s., att ett steg framåt betyder en relativt mindre refraktionsändring, ju större kärnladdningen är. Detta ger som undre gräns Na^+ värdet 0,39.

Då $Na^+ < Ne < 1{,}00$ och vidare $K^+ - Na^+ = 2{,}03$, måste $K^+ < 3{,}03$. Nu är $A = 4{,}20$ och därför

$$\frac{A}{K^+} > \frac{4{,}20}{3{,}03} > 1{,}39\,.$$

Men en differens av 1 enhet i kärnladdning mellan ädelgas och alkalijon måste medföra en mindre differens i bindningens fasthet, ju större kärnladdningen är:

$$\frac{X}{Cs^+} < \frac{Kr}{Rb^+} < \frac{A}{K^+} < \frac{Ne}{Na^+} < \frac{He}{Li^+};$$

1,39 är således också för $\frac{Ne}{Na^+}$ den undre gränsen, så att $\frac{1{,}00}{1{,}39} = 0{,}72$ framställer den övre gränsen för Na^+. Medeltalet mellan 0,39 och $0{,}72 = 0{,}55 = Na^+$ väljer Fajans till

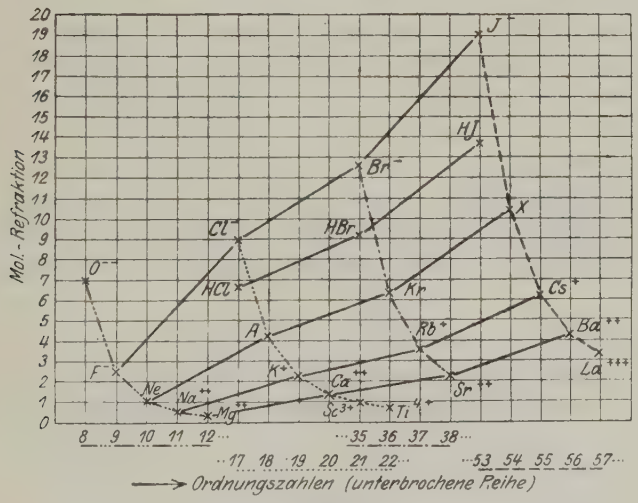


Fig. 3.

värde på mol.-refraktionen. Detta värde ger sedan alla värden på de gasformiga jonernas refraktioner. Man får då följande grafiska framställning av de fria jonernas refraktioner (fig. 3).

Det är av intresse att jämföra joner av samma byggnad,

t. ex. joner av argontyp (Cl^-, A, K^+, Ca^{++}). Alla dessa hava samma antal elektroner men stigande pos. kärnladdning; d. v. s. elektronhöljets fasthet stiger, och mol.-refraktionen sjunker.

Nu kan A tänkas uppkomma ur Cl^- på så sätt, att man ökar klorjonens kärnladdning med en enhet, vilket medför en sammandragning av atomen och en stabilisering av elektronhöljet. Men den positiva laddningen kan också ökas på sådant sätt, att man tillför en punktformig positiv laddning i form av en vätejon. Enligt äldre föreställningar borde detta icke medföra någon ändring i refraktionen, d. v. s. HCl borde ha samma refraktion som Cl^-, om nämligen mol.-refraktionen är additiv, och då vidare H^+, som är elektronlös, saknar refraktion. I stället finner man en utpräglad minskning i mol.-refraktionen, en minskning, vars beräkning ur energetisk synpunkt visar, att den icke kan vara beroende av en polarisation av Cl^--jonen med oförändrat elektronhölje, utan att denna polarisation åtföljes av en deformation av elektronhöljet.

Halogenjonernas deformerbarhet stiger i serien Cl^-, Br^-, J^-. I överensstämmelse härmed finner man, att tillkomsten av en vätekärna medför en större minskning i mol.-refraktionen för $\overline{Br}$ än för Cl^- och större för J^- än för $\overline{Br}$. (Se tab. 1.)

Tab. 1. R (för D-linjen).

X	F	Cl	Br	J
R_{X^-}	2,50	9,00	12,67	19,24
R_{HX}	(1,90)	6,67	9,14	13,74
$\triangle$	(0,60)	2,33	3,53	5,50

Born och Heisenberg giva följande åskådliga bild av refraktionsvärdena av systemet $\overset{+}{H} - \overline{Cl}$ i olika lägen. Om $\overset{+}{H}$ befinner sig på oändligt avstånd från $\overline{Cl}$, så har man den fria klorjonens refraktion, om den tränger in i klorjonens kärna, har man argonatomens, stannar den i ett medel-

läge, i klorjonens yttre elektronhölje, har man en *HCl*-molekyls. I överensstämmelse härmed har man

	$\overline{Cl}$	*HCl*	*A*
R	9,00	6,67	4,20

Utrymmet medger icke ingåendet på den deformationsverkan, som andra kationer utöva, och de ändringar i mol.-refraktionen, som den medför. Fajans och Joos hava nedlagt sina studier på detta område i en omfångsrik avhandling, varur följande sammanfattande satser må hämtas.

Om man tolkar avvikelserna från mol.-refraktionens additivitet (vid bildning av lösningar, salter, komplexa joner, molekyler) som följder av en deformation av elektronbanorna, så visar sig, att kationer utöva en deformerande verkan såväl på lösningsvattnet som på anioner i salter, så att elektronhöljet blir fastare och refraktionen mindre. Deformationen är desto större, ju starkare fält, som omger den deformerande kationen, d. v. s. ju mindre och starkare laddad den är och vidare ju större anionen är. Som redan framhållits, är anionernas deformerande effekt på kationerna mycket mindre, och endast i fråga om fluor har en sådan effekt på större kationer kunnat påvisas.

De optiska data göra det sannolikt, att vätekärnan i vattenlösning anlagrar sig till en vattenmolekyl under nedsättning av dess refraktion och bildning av den komplexa kationen H_3O^+.

Gitteravstånd. Om anionernas deformation består i att deras elektronbanor dragas i riktning mot kationerna, så bör man vänta sig, att avståndet mellan jonerna blir mindre än vid antagandet av odeformerbara joner. Detta framgår också av en jämförelse mellan *Na*- och *Ag*-halogenidernas gitteravstånd (av dessa två kationer är Ag^+ den starkast deformerande).

	F	*Cl*	*Br*	*J*
Ag	2,58	2,78	2,89	2,83
Na	2,32	2,81	2,98	3,23
Diff	+ 0,26	— 0,03	— 0,09	— 0,40

Här är J^- mest deformerbar, F^- minst. I fallet *NaF* och *AgF* inträder mycket liten deformation och likaså i fråga om de andra *Na*-salterna. Normalt borde gitteravståndet vara större för alla silversalterna.

Alkalihalogenidernas flyktighet och deformationshypotesen. Om elektronbanorna i kristallgittret äro desamma som i den fria molekylen, så är enligt A. Reis sublimationsvärmet för salter av lika struktur en konstant bråkdel av gitterenergien (härmed förstår man den energi, som frigöres, då två gasformiga joner från oändligt avstånd närma sig varandra och bilda en molekyl). För alkalihalogeniderna är denna bråkdel 0,32. Om däremot vid gittrets upplösning jonerna frivilligt deformeras, alltså under avgivande av energi, så minskas sublimationsvärmet med motsvarande belopp, och denna minskning blir desto större, ju större jondeformationen är. Fajans undersöker alkalihalogeniderna från denna synpunkt. Nu äro visserligen deras sublimationsvärmen icke noggrant bekanta, men då flyktigheten av ett ämne sjunker med stigande sublimationsvärme, kan man i stället anställa jämförelsen mellan salternas kokpunkter, vilka nyligen bestämts av v. Wartenberg. Man bör då vänta sig, att variationerna i kokpunkt avvika från variationerna i gitterenergi, vilket också framgår av tab. 2.

Jämför härmed (tab. 3) gitterenergierna (i *kgkal*) för alkalihalogeniderna (enligt Grimm, absolutvärdena osäkra, men differenserna säkra).

Om vi bortse från *Li*-salter och fluorider och vidare från den obetydliga deformationen av kationer, så kunna vi inskränka oss till att betrakta deformationen av Cl^-, Br^-, J^- genom Na^+, K^+, Rb^+, Cs^+. Denna deformation växer från Cl^- till J^- och från Cs^+ till Na^+. Starkaste nedsättningen

Tab. 2. Kokpunkter vid 760 mm i C°.

	F	△	*Cl*	△	*Br*	△	*J*
Li	1676	294	1382	72	1310	140	1170
△	— 19		— 59		— 83		— 130
Na	1695	254	1441	48	1390	93	1300
△	190		24		12		— 31
K	1505	88	1417	36	1381	50	1331
△	95		34		30		26
Rb	1410	27	1383	32	1351	46	1305
△	159		80		51		25
Cs	1251	— 52	1300	3	1300	20	1280

Tab. 3.

	F	△	*Cl*	△	*Br*	△	*J*
Li	278	— 11	289	74	215	15	200
△	35		84		23		20
Na	243	38	205	13	192	12	180
△	20		16		14		13
K	220	31	189	11	178	11	167
△	8		6		4		4
Rb	212	29	183	9	174	11	163
△	8		5		6		4
Cs	204	26	178	10	168	9	159

i kokpunkt böra därför å ena sidan jodiderna; å andra sidan *Na*-salterna visa, den minsta kloriderna och *Cs*-salterna. En jämförelse mellan tabellerna visar, att differensen i gitterenergi klorid-bromid är oberoende av kationen och = differensen i gitterenergi bromid-jodid. Däremot växer differensen i kokpunkter från *Cs* till *Na* och från *Cl* till *J*.

För *NaJ* är gitterenergien $>$ än för *KJ*, men dess deformationsenergi överträffar tydligen den för *KJ* så mycket, att dess kokpunkt ligger lägre.

$NaF - CsF = 444°$ men $NaCl - CsCl = 141°$, och $NaJ - CsJ = 20°$, vilket sammanhänger med att F^- är mycket litet deformerad men själv deformerar kationerna i ordning Na — Cs. Härigenom blir Cs-fluoridens kokpunkt särskilt starkt nedsatt.

Färg och deformation. Man finner ofta, att färgen av oorganiska och organiska salter fördjupas från klor till jod. Så är blyklorid vit, blyjodid gul, silverhalogeniderna ge exempel på samma förhållande. Det är också påfallande, att vissa oxider och sulfider, föreningar av de färglösa O^{--}- och S^{--}-jonerna med färglösa tunga metalljoner, äro starkt färgade. Från deformationshypotesens ståndpunkt blir förklaringen den, att medan dessa anioner i fri form icke visa någon absorption i det synliga spektret, så inträder under inverkan av en starkt deformerande kation en sådan verkan på anionen, att den nu absorberar redan i den synliga delen av spektret. Att jodider äro starkare färgade än bromider och dessa starkare än klorider och fluorider, beror på den förut berörda olika lätthet, varmed dessa joner deformeras, nämligen jod lättast, klor (fluor) svårast. Man kan vackert tillämpa detta på kuprisalter. Vattenfritt $CuSO_4$ och CuF_2 äro färglösa, alltså är Cu^{++} färglös. $CuCl_2$ är brungul, vilket måste vara en följd av klorjonens deformation (kationerna deformeras som nämnt obetydligt på grund av sina mindre radier). Ännu lättare deformerbar är Br, och $CuBr_2$ är som följd därav svart, medan slutligen jodatomen deformeras så starkt av Cu^{++} att den förlorar sin elektron och övergår till fri jod, $CuJ_2 = CuJ + J$.

Att alla kuprisalter i utsp. vattenlösning äro blåa, är, i konsekvens härav, beroende på en deformation av vattnets elektronhölje.

Utan tvivel har deformationshypotesen redan vunnit många framgångar; för sin fortsatta utveckling torde den vara starkt beroende av möjligheten att förutberäkna deformationen i ett givet fält, ett problem, som säkert kommer att erbjuda stora svårigheter.

Lärobokens roll vid geometriundervisningen i realskolan.

Av M. E. WAHLGREN.

Hjalmar Olson, *Plan geometri* för realskolor, mellanskolor, högre folkskolor och därmed jämförliga läroanstalter, J. Beckmans förlag, 1925. 134 sid. Kr. 2: 60.

Harald Yngve Larson, *Lärobok i geometri*, motsvarande Euklides' första, tredje och fjärde böcker, Almqvist & Wiksells förlag, 1925. 100 sid. Kr. 3: 75.

»Icke blott dogmatiskt bibringande af positiva sanningar och practiskt användbara kunskaper utgör hela föremålet för den Theoretiska delen af all Uppfostran; ett äfven så väsendteligt och, tör hända, ännu angelägnare bör vara att väcka och underhålla den kraft till sjelfständig productiv verksamhet, som ensam förmår undanrödja förekommande svårigheter, och att åt förståndet gifva den stränghet i critik öfver förefallande begrepp och dervid anbragte resonnementer, som alltid skiljer redbar upptäckt och sann originalitet ifrån idel grundlösa förslagsmakerier och en orolig inbildnings vidunderligt sammanbundne extravagancer.»

Man har svårt att föreställa sig dessa ord skrivna för över 100 år sedan, men de förekomma likväl i ett Betänkande från Kongl. Vetenskaps Academien av den 10 maj 1810 över första handskriften till »Grunderna till Geometrien» av prof. Carl Erik Kjellin. Emellertid äro de ingalunda uttryck för antikverade åsikter. Tvärtom, de ha ännu icke slagit igenom, åtminstone icke i geometrilärоböckerna. En uppsjö av dem sörja nog för ett »dogmatiskt bibringande av positiva sanningar», men man får leta efter så-

dana, som förstå att »väcka och underhålla kraft till produktiv verksamhet». Att Hjalmar Olson haft uppmärksamheten riktad på detta missförhållande, framgår av förordet till hans lärobok i geometri, men han skjuter initiativet till en mera genomgripande reform ifrån sig genom att förklara, att den hevristiskt bedrivna delen av kunskapsmeddelandet bör vara lärarens sak, icke lärobokens. Dess volym skulle eljest bli alltför omfångsrik. Med rätta framhåller han, att det icke räcker med att bygga på den geometriska åskådningslära, som skall genomgås i läroverkens tredje klass, men att det förefaller honom mindre lämpligt att låta lärobokens framställning avbrytas av frågor, som lämnas obesvarade. Det kunde ytterligare framhävas, att en kurs, som skall omfatta räta linjen, planet, vinklar, trianglar, parallellogrammer, cirklar, cirkelsektorer, proportionalitet, likformighet, prisma, cylinder, pyramid och sfär, allt med mätningar och annat arbete med dessa begrepp, och som skall genomgås under ett år på ett så tidigt stadium, knappast kan bli annat än ett fuskverk och i alla händelser en högst otillräcklig erfarenhetsgrund för den följande systematiska geometriundervisningen.

Förf. har i varje fall med sin lärobok tagit ett stort steg i riktning mot målet för en mera modern lärobok i geometri. Bland krav på en sådan torde böra framhållas: Den bör ge lärjungarna tillfälle att själva få vara med om tillverkningen av »pjäserna till puzzlespelet» och icke servera dem satser, som de måste tro existera apriori färdigformulerade men upptäckta och bevisade av en herre vid namn Euklides. För detta ändamål vore det lämpligt, att läroboken *i början av* varje kapitel som förberedelse upptoge ett antal övningsuppgifter med däri förekommande sträckors längder och vinklars storlek till en början angivna i resp. måttsenheter. I de olika uppgifterna borde mätetalen för dessa storheter planmässigt varieras så, att den sats eller de satser, som skulle förberedas, bleve fullständigt empiriskt klarlagda. Efter en kort teoretisk utredning kunde så satserna formuleras som resultat av den gjorda undersökningen och deras

allmängiltighet bevisas på vanligt sätt. En del för ändamålet lämpliga övningsuppgifter finnas i Olsons lärobok, t.ex. n:r 8, som ypperligt förbereder sats 3, n:r 13, som dock borde komma före sats 10 (ty det är väl ingen mening i att uppmana en lärjunge att konstruera en triangel med sidorna 13, 7 och 5, då han förut vet, att det måste misslyckas), n:r 15, vilken helst borde följas av en sats om sambandet mellan alternat-, likbelägna och motställda vinklar, n:ris 46 och 47, förberedande Pythagoras' sats, m. fl. Även sådana mera teoretiska utredningar, som ovan nämnts, finnas där representerade, kap. II (beviset till sats 4 b), kap. III (Om rätliniga figurers kongruens), kap. IV (Om parallella linjer), före sats 58, sats 67, kap. IV (Om geometriska orter) och kap. XII (Om regelb. månghörningar). — Läroboken bör vänja lärjungarna vid att metodiskt variera figurerna vid satsernas förberedning. Satserna 37 och 67 borde med hänsyn till detta krav ha fått en annan behandling. Vid undersökningen av problemet (sats 37): att upprita en triangel, då man känner två sidor och en motstående vinkel, hade det varit naturligast, om förf. låtit den givna vinkeln vara »oberoende variabel», den bredvidliggande sidan konstant och den motstående sidan »beroende variabel». — »Skioptikonbilderna» böra, där så ske kan, ersättas med »kinematografbilder». Till det senare slaget kunna i Olsons lärobok räknas först och främst figuren å sid. 26, vidare figurerna till sats 37 (med den reservation som ovan gjorts), före sats 58, till sats 66 m. fl. Till det förra slaget höra så gott som alla de »konventionella» figurer, som möta läsarens blick i äldre läroböcker, i vilka t. o. m. varje spår till konstruktionslinjer ängsligt utsuddats. — Läroboken bör lämna sådana bevis, som äro fria från beroendet av åskådningen. Nog ser man i fig. till sats 15, att B och F' ligga på samma sida om AG, men frågan är, om det under alla förhållanden *måste* vara så med de givna förutsättningarna. Likartat är förhållandet med fig. till sats 64 b, där lämpligen en rad bör skjutas in i beviset: »∴ C och D ligga på samma sida om HJ», för att man skall kunna säga,

att $\smile HKJ > \smile CKD$. Figurerna till sats 56 äro synnerligen lyckligt gjorda för det syfte, som här avses. Vid både kongruensfallen och likformighetsfallen vore det önskvärt, att de båda trianglarna ej placerades så, att motsvarande sidor bli parallella eller se ut att vara det. De exempel på att åskådningen kan bedraga, förf. lämnar i förordet, äro ej övertygande. Dömer man enbart efter åskådningen, lär ju exemplet med de svängande stenarna, att två ellipser kunna skära varandra i 4 punkter. Att två cirklar (även om de äro stora och nästan koncentriska) endast kunna skära varandra på två ställen, inses lika säkert, som att två räta linjer (även om de bilda mycket liten vinkel med varandra) blott kunna skära varandra på ett ställe. Däremot skulle den lapsus, förf. gjort, då han bland parallella linjer uppräknar bl. a. ett par lodlinjer, kunna användas för ändamålet.

Definitioner, axiom och postulat borde lämpligast formuleras och göras till föremål för diskussion i den del av framställningen, där de första gången komma till användning (och helst samlas i slutet av läroboken). Detta har förf. gjort med parallell- och flyttningsaxiomen (fråga är, om icke det sistnämnda bort behandlas redan i sats 4 a).

Den största förtjänsten hos Olsons Plan geometri synes anm. vara dess strävan att frigöra sig från den för geometriläroböcker så typiska katekesnaturen. Innehållet är icke blott kunskapsmeddelande utan ock tankeväckande. De talrika (274 st.) och väl valda övningsuppgifterna äro dels siffertillämpningar av planimetrisk art, avsedda att förbereda, belysa och tillämpa satserna, dels rent geometriska, ägnade att giva lärjungarna övning i självständigt logiskt tänkande. Mycket intressant och instruktivt är det tolfte kapitlet, »Anmärkningar och historiska notiser». Läroboken innehåller icke blott en minimikurs för realskolans 4:e, 5:e och 6:e klasser utan därutöver ett tiotal med asterisk utmärkta satser, som (värdefulla i och för sig) dock kunna överhoppas, utan att sammanhanget blir lidande därpå, samt ett helt kapitel om 9 satser angående

sambandet mellan ytor och sträckor. Den klavbinder icke lärarens frihet till individuell planläggning och behandling av kursen, och i betraktande av dess gedigna och koncentrerade innehåll måste dess pris anses vara lågt. Som dess förtjänster ligga i öppen dag för var och en, som haft tillfälle att pröva ett flertal andra läroböcker, kan den varmt rekommenderas till användning i de skolor, till vilkas tjänst den utgivits.

Även Harald Yngve Larson har »tagit ståndpunkt till frågan om Euklides vara eller icke vara», och resultatet har blivit, att han ämnar låta Euklides' ord till konung Ptolemæus II: »Det gives ingen kungsväg till geometrien» komma på skam genom att i sin lärobok söka »förena det euklideiska kravet på sträng logisk skärpa med nutidens krav på tidsbesparing». Att Larsons lärobok tillfredsställer det senare kravet framgår därav, att dess 62 satser ge det väsentliga av innehållet i Euklides' 1:a, 3:e och 4.e böcker (101 propositioner). Men att den ej tillfredsställer kravet på logisk skärpa, allraminst något euklideiskt sådant, är redan vid en flyktig granskning uppenbart. Det måste smärta varje uppriktig beundrare av Euklides att läsa författarens omdöme om E. I: 2 och 3 (»särdeles triviala satser»!). Undertecknad anser, att alla de utgivare av euklideseditioner, som utesluta E. I: 2 och sedan använda den likbenta i stället för den liksidiga triangeln vid tudelningen av en sträcka och en vinkel, konstr. av normalen m. m., icke gjort full rättvisa åt den store logikerns verk. Ty vill man dela en sträcka AB mitt itu och vara säker på att lyckas, duger det ej att taga A till medelpunkt för en cirkel med en radie, om vilken det blott påstås, att den skall vara större än halva AB, eftersom man icke vet, var AB:s mittpunkt ligger och icke några villkor för cirklars skärning undersökts. Och om man från en punkt P utanför en rät linje skall draga en normal till linjen, kan man icke taga P till medelpunkt för en cirkel, som man med säkerhet vet skall skära linjen, förrän passarens ritstift placerats i någon godtycklig punkt på andra sidan linjen, än den P befinner sig. Att den av författaren

använda lösningen till E. III: 17 (vilken väl förekommer i de flesta nyare läroböcker) skulle vara så mycket enklare än den av Euklides givna, kan anm. icke inse. Den senare är en tillämpning på en mycket generell lösningsmetod (en godtycklig tangent vrides, tills den går genom den givna punkten) och kan därför vara nog så lärorik.

Den av förf. i förordet uttalade avsikten att ordna satserna så, att de i ett teorem givna förutsättningarna skola kunna konstrueras med stöd av förut bevisade satser, utgör en av lärobokens största pedagogiska förtjänster. Då det emellertid ej alltid låter sig göra (ex. avd. 2: 11 och avd. 3: 4), och då det tvingat förf. att för tidigt införa 2:a kongruensfallet, har den pedagogiska fördelen måst köpas för dyrt. Beviset för 2:a kongruensfallet (som för övrigt torde vara det, för vilket man mest känner behov av bevis, enär en triangel, ex. gjord av 3 stänger, förenade medelst gångjärn i hörnen, ej utan vidare inses vara stabil till formen) förutsätter kännedom om satser, vilka vanligen bruka förekomma på kapitlet om cirkeln men av förf. helt uteslutits, samt axiom, som ej upptagits i förteckningen över dylika. Förf:s bevis för sats 15 i avd. 1 kan användas endast för det fall, att punkten G i fig. 21 ligger utanför $\triangle EDF$, vilket ju icke alls måste vara fallet. Ett gott grepp är införandet av hjälpsatsen sid. 31. Att skapa ett euklideiskt system utan att behöva anlita parallellaxiomet tror sig förf. ha lyckats med genom att helt enkelt betrakta omvändningen till E. I: 27 som koroll. till E. I: 31, vilket emellertid måste anses vara ett alltför lättvindigt sätt att komma ifrån lösningen av den euklideiska geometriens kanske svåraste problem. Specialfallet till 4:e kongruensfallet (om det nu nödvändigt skall behövas ett sådant) bevisas betydligt enklare, om i fig. 29 $\triangle ABC$ tänkes lagd vid sidan av $\triangle DEF$, så att AB och DE sammanfalla. Ej vidare logiskt är det att omedelbart efter def. på pgrm. införa satser om konstruktion av en pgrm. på annat sätt än det, definitionen ger anvisning på. Def. på romb, rektangel och kvadrat innehålla härledda bestämningar.

Hur mycket man än må behjärta en lärares vällovliga önskan att vid examenstillfällen kunna uppvisa, att hans lärjungar ordentligt kunna den kurs, de under hans ledning genomgått, och hur lättfattlig, överskådlig och bekväm för vinnandet av detta syfte, Larsons lärobok än synes vara, kan anm. icke underlåta att ännu en gång fästa uppmärksamheten på de ord, som, härstammande från auktoritativt håll, inleda denna uppsats, och som betona, att det vid undervisningen mest uppfostrande momentet, uppväckandet av förmåga till självständig produktiv verksamhet är långt viktigare än förmågan att än aldrig så korrekt återgiva andras tankar och ord. Den erfarne och initierade åhöraren vid en examen märker genast på den inåtvända, glasartade blick, varmed en lärjunge, som huvudsakligen »minnesvägen» inhämtat sin geometrikurs, betraktar den på tavlan uppritade figuren, att dennes tankar kretsa omkring saken så ovidkommande ting som »högersida eller vänstersida?» eller dylikt, och att figurerna icke behöva göras mycket avvikande från den inlärda formen, förrän tankemaskineriet hos eleven tilltrasslas eller helt avkopplas. En annan synpunkt, som i Larsons lärobok ej tillbörligt beaktats, är den, att läroboksförfattare, som ju i regel själva äro erfarna och goda pedagoger, i läroböckerna borde angiva sina åsikter om riktlinjerna för undervisningens bedrivande till hjälp särskilt åt yngre lärare, vilka ännu icke hunnit skaffa sig något fast pedagogiskt grepp om ämnet. Som exempel skulle anm. vilja nämna två små häften, Lindhagens Ekvationer, i vilka förf., utan att ett ord nämnes därom, genom blotta urvalet och sammanställningen av ekvationer på ett lika otvetydigt som skickligt sätt låtit komma till synes, hur han anser, att de första grunderna av ekvationslösningen böra bibringas eleverna.

Geologisk och mineralogisk litteratur.

Av **NILS ALSÉN.**

Otto Gertz och Karl A. Grönvall. *Grundlinjer till mineral- och bergartslära.* C. W. K. Gleerups förlag, 1923. 111 sid. Kr. 2: 50.

Bertil Harberg. *Lärobok i geologi.* Förf:s förlag, 1925. A. Text, 47 sid. B. Bilder, 48 sid. Häft. kr. 2: —.

Carl C:zon Caldenius och Ragnar Sandegren. *Vårt land under och efter istiden.* Natur och Kultur, 1925. 159 sid. + 1 karta. Kr. 3: —, häft. kr. 2: 25.

Anton Sörlin. *Jorden och livet.* Hemuniversitetets bibliotek I, Lars Hökerbergs förlag, 1925. 313 sid. Kr. 10: —, häft. kr. 7: 50.

Om också ämnesgruppen geologi med mineralogi intar ett jämförelsevis blygsamt rum bland de skolämnen, som denna tidskrift företräder, har det likväl ansetts lämpligt, att ovanstående arbeten här finge ett kort omnämnande.

Gertz och Grönvall ha avsett sin bok som lärobok på realgymnasiet och framför allt för den sammanfattande repetitionen av mineral- och bergartsläran, som kursplanen föreskriver i ring IV. Då den tid, som kemien med den nu gällande kursplanen kan avstå åt mineralogien och petrografien, är mycket knapp, ha förff. tänkt sig, att vissa delar kunde inhämtas av eleverna på egen hand. Den minimikurs, som bör genomgås vid skolundervisningen, har tryckts med större stil. Till ledning för studierna på egen hand är boken försedd med ett stort antal synnerligen vackra figurer, vilka emellertid också kunna bli undervisningen direkt till gagn vid sådana skolor, som blott ha en mindre mineral- och bergartssamling. Förutom en avdelning för mineralära och en för bergartslära upptager boken en

kortare historik och en redogörelse för praktiskt viktiga mineral och bergarter och slutligen en förklaring till mineralogiska och petrografiska namn och termer. De tre senare avdelningarna höja enligt min mening bokens värde betydligt.

I fråga om ämnets behandling synes i stort sett ingen befogad anmärkning kunna göras. För min del skulle jag visserligen, såsom jag förut framhållit i denna tidskrift, önskat en mera modern framställning av kristallografien, grundande sig på den gnomoniska projektionen och lauefotogrammet[1]. Tyvärr ha några fel insmugit sig här och där. Så definieras på sid. 20 genomgångar som vissa riktningar, vilket icke hindrar, att det några rader ned talas om »avståndet mellan genomgångarna». På sid. 24 påstås, att kalkspaten har två optiska axlar, och polariserat ljus säges karakteriseras därav, att svängningarna ske endast i ett mot strålens längdriktning vinkelrätt plan — i stället för linje. Det uppges å sid. 85, att man uppdelar röntgenstrålningen genom ett prisma — i stället för genom en kristall. I fig. 14 står det rombdodekaedrar i stället för pentagondodekaedrar, och på sid. 11 jämställas parametrar och indices. Då på sid. 14 antalet symmetriplan anges såsom något karakteristiskt för de olika kristallsystemen, borde ha sagts, att det uppgivna antalet gällde blott för heltaliga former.

De påtalade bristerna i boken kunna icke skymma bort dess stora förtjänster. Och särskilt måste man vara tacksam mot förff., därför att de velat slå ett slag för mineralogien på skolstadiet och »strävat efter att åt detta ämne försvara en om ock anspråkslös plats i skolundervisningen».

Harbergs lilla bok torde närmast vara avsedd som en kortfattad lärobok för andra skolformer än de allmänna läroverken. Emellertid innehåller den ungefär så mycket, som åtminstone på vissa håll genomgås i läroverkens femte klass i samband med kemikursen, varför den kan tänkas ifrågakomma även där. Förf. har alldeles skilt bildmaterialet från texten, t. o. m. tagit det i olika häften. Detta arrange-

[1] 8:e årg. sid. 35.

mang kan nog vara av värde på sådana håll, där förrådet av tavlor och skioptikonbilder är mycket magert, så att man får så gott som helt lita till lärobokens illustrationsmaterial. Detta är också synnerligen väl valt; av särskilt intresse är, att här för första gången i en svensk geologisk lärobok flygfoton kommit till användning.

Förf. har bemödat sig att göra framställningen så lättfattlig och konkret som möjligt. Denna strävan har — synes det — lockat honom bort från den stränga sakligheten, så att åtskilliga fel kunna påvisas i boken. Jag skall nöja mig med att citera förf:s förklaring på sid. 20 rörande de metamorfoserade bergarternas bildning. — — — »Gneis är bildad av omvandlad granit antingen genom att graniten sönderfallit i fältspat, glimmer och kvarts, vilka kristallkorn sedan avsatt sig i lager och hårdnat, eller genom att granitmassor stelnat så långsamt, att kristallerna kunnat lägga sig i lager.» Modern uppfattning tolkar ju de kristallina skiffrarnas bildning genom uppvärmning av en bergartsmassa under tryck, varvid omkristallisering ägt rum, samtidigt som kristallerna orienterat sig i vissa bestämda riktningar. En del tidsuppgifter synas också vara givna väl summariskt, såsom då det på sid. 24 säges, att »urtiden omfattar mer än hälften av jordens hela ålder». Att avdelningen om Sverige under urtiden är mycket schematiserad, är naturligt.

Till följd av sakliga brister bör Harbergs bok i sitt nuvarande skick icke komma till användning vid läroverken. För självstudier och inom studiecirklar kan den nog bli av värde tack vare det utmärkta bildmaterialet.

De bägge återstående böckerna kunna icke rubriceras som skolböcker för läroverken. De äro emellertid populärvetenskapliga arbeten av hög rang.

Det av Caldenius och Sandegren utgivna arbetet upptar först en inledning, som behandlar delar ur den dynamiska geologien, nämligen 1) havet och stranden, 2) landisen och dess bildningar och 3) landskulpturen, älvarna, förvittring och jordmånsbildning. Detta är tydligen sådant, som ofta tas

i samband med geologikursen i klass 5 vid läroverken. De följande avdelningarna behandla vårt lands geografiska utveckling efter istiden. Arbetet utgör en utmärkt framställning av Sveriges kvartärgeologi, som varit föremål för framför allt professor De Geers epokgörande undersökningar. Att det är i främsta rummet geografilärarna, som kunna utnyttja boken för sin undervisning, är tydligt, men även läraren i kemi i klass 5 kan däri hämta åtskilligt av värde. Denna bok bör också i elevernas händer kunna verka väckande, så att de på ett nyttigare sätt än ofta sker använda den långa sommarferien.

Att den vetenskapliga vederhäftigheten förefinns hos Sörlins populära geologi, därför borgar i främsta rummet det lovordande förordet av professor De Geer. En recension i facktidskriften Geologiska föreningens förhandlingar ger också ett gott betyg åt det sakliga innehållet. Recensenten slutar på följande sätt: »Som slutomdöme skulle jag vilja säga, att boken är den bästa populärvetenskapliga allmängeologi, vi för närvarande äga, och därför förtjänar en stor och allmän spridning; även geologer av facket kunna hava stort nöje av att läsa densamma.» Det är emellertid icke bara vetenskapsmannen, som talat i denna bok. Även den vane pedagogen kommer till synes, då förf. fyndigt knyter det för läsaren nya materialet till allmänbekanta saker. Slutligen framskymtar i stilen den litterärt och estetiskt intresserade, som förstår betydelsen av att skriva en bok, som är lättläst och rolig.

Av icke minst intresse för lärarna torde det sista kapitlet om geologisk hembygdsforskning vara. Tyvärr torde priset på boken hindra den från att nå allmän spridning bland våra läroverks skolungdom, vilket den så väl skulle förtjäna. Som premiebok lämpar den sig utomordentligt väl. Att den, liksom den föregående, skall kunna egga skolungdomen till egna iakttagelser och rön ute i naturen är alldeles visst, i synnerhet om någon ledning lämnas från skolans sida.

Matematiken i realskolans högsta klasser.

Genmäle av **ALFRED UDDHOLM.**

Under ovanstående rubrik förekommer i dubbelhäftet 1—2 av denna tidskrifts årgång 1925—26 en anmälan av några läroböcker i matematik för realskolan. Efter att ha med intresse tagit del av artikeln i fråga ber jag med anledning av vad som däri yttras om min lärobok få anföra följande.

Jag utgår från den av den ärade artikelförfattaren, lektor Hjalmar Olson, citerade realskoluppgiften v. t. 1919. Om en person med någon matematisk träning ställdes inför denna uppgift, skulle han väl resonera ungefär så här: handlanden vill förtjäna 10 %, alltså bör han ta för varan $(100 + 10)$ % av 350 kr.; på det begärda priset x kr. lämnar han $16^2/_3$ % rabatt, d. v. s. han får $(100 - 16^2/_3)$ % av x kr.; ekvationen blir alltså $110\,(\text{procent}) \cdot 350 = 83^1/_3\,(\text{procent}) \cdot x$ eller $110 \cdot 350 = 83^1/_3 \cdot x$. Mot denna lösning torde ingen anmärkning kunna göras. Analysen är fullt uttömmande och ekvationsbehandlingen blir möjligast enkel.

Om en elev i sjätte klassen för första gången ställdes inför uppgiften, skulle han förmodligen komma fram till ekvationen $350 + \frac{10}{100} \cdot 350 = x - \frac{16^2/_3}{100} \cdot x$. Resultatet måste anses gott som förstahandsprodukt betraktat, då det utvisar, att eleven förmått riktigt analysera uppgiften. Som slutprodukt däremot måste det anses mindre tillfredsställande, då det inbjuder till en onödigt krånglig ekvationsbehandling. Då lärjungen endast i undantagsfall av egen drift inom rimlig tid skulle gå vidare mot idealet, bör enligt mitt förmenande läraren ingripa och söka leda eleven in på de tankebanor, som snabbt föra fram till en naturlig och

enkel lösning. Det möter inga större svårigheter att få elever på detta stadium att förstå, att $350 + \frac{10}{100} \cdot 350$ kan dras ihop till $\frac{110}{100} \cdot 350$ och att $x - \frac{16^2/_3}{100} x$ likaledes kan skrivas $\frac{83^1/_3}{100} \cdot x$; generaliseringarna $\frac{100 + v}{100} \cdot I$ och $\frac{100 - r}{100} \cdot B$ överskrida icke heller en normalt begåvad sjätteklassists abstraktionsförmåga. Har eleven några gånger etappvis genomlöpt dessa tankebanor, analyserar han den ifrågavarande uppgiften på ett ögonblick och nedskriver direkt $110 \cdot 350 = 83^1/_3 \cdot x$, d. v. s. han tillämpar formeln $(100 + v) \cdot I = (100 - r) \cdot B$. Men det är en tillämpning, väsensskild från den schablonmässiga insättning av $v = 10$, $I = 350$ o. s. v., som lektor Olson tycks förutsätta som självklar. Eventuellt förekommande tendenser i denna riktning bland eleverna bekämpas enkelt och verksamt därigenom, att ej formeln som sådan göres till huvudsak, utan dess deducering. En elev skall naturligtvis icke tillåtas använda en formel, förrän läraren övertygat sig om, att tillämpandet innebär resultatet av en matematisk tankegång, som lärjungen behärskar, och icke en själlös insättning.

Det må tillåtas mig att något dröja vid ett par andra formler, som lektor Olson citerar ur min bok. Den variant av diskontformeln, som förekommer, är uteslutande avsedd att användas vid en efterföljande deducering av formeln för effektiva procenten vid växlar, $e = \frac{100\,p}{100 - pt}$. Denna senare formel, liksom motsvarande för obligationer, $e = \frac{100\,n}{k}$, är icke avsedd för direkt bruk. De äro deducerade och medtagna därför, att de var för sig utgöra ett utmärkt underlag för en rent matematiskt värdefull och sakligt givande diskussion av sambandet mellan effektiv och nominell räntefot. Om man i växelformeln låter t anta stora värden, kommer ju e att bli orimligt stort i förhållande till p. Det

framgår härav klart, varför växlar måste vara »korta» papper, något som eleverna givetvis böra göras underkunniga om. Obligationsformeln återspeglar särdeles åskådligt sambandet mellan *e*, *n* och *k*.

Med det sagda hoppas jag ha visat, att det ligger en förnuftig mening i min boks formeldeduceringar. De sammanhänga med bokens tydligt markerade karaktär av lärobok. Jag har velat teoretiskt belysa några i klassen vanliga slag av räkneoperationer, och jag har klätt mitt resonemang i matematisk dräkt. Laborerandet med generella beteckningar på förekommande storheter underlättar enligt mitt förmenande för lärjungarna uppfattandet av lagbundenheter och samband, som annars lätt nog och ofta nog drunkna i siffror och sifferräkningar. En mera generellt lagd framställning synes mig desto mera motiverad i avslutningsklassen, som det konkreta underlaget i stor utsträckning bör vara tillfinnandes från arbetet i föregående klasser, i vilka lärjungarna stiftat en första och ganska grundlig bekantskap med flertalet typer av i realskolan förekommande affärsproblem.

Lektor Olsons sammanfattande omdöme om min bok, att den »förefaller alltför vidlyftig och lärd för realskolan», finner jag hårt och summariskt. Då det icke motiveras, saknar jag underlag för ett detaljbemötande. Följande må emellertid anföras. Boken är utarbetad med beaktande av erfarenheter, som jag förvärvat under 10-årig verksamhet som lärare i matematik i sjätte klassen. Med stöd av dessa erfarenheter vågar jag bestämt påstå, att bokens normalkurs — tryckt med vanlig stil — icke innehåller svårigheter, som ej under lärarens ledning kunna övervinnas av en normal realklass. En annan sak är, att tiden icke alltid kommer att medgiva genomgång av hela den sålunda betecknade kursen, men möjlighet föreligger då att i enlighet med kursplanens anvisningar inskränka kurserna i sammansatt ränta och rymdgeometri. De med finare stil tryckta partierna äro avsedda att för begåvade avdelningar och elever möjliggöra ett fördjupat inträngande

i några viktiga kursmoment. Det är ju ett känt och omvittnat förhållande, att realklassen vid olika slag av läroanstalter ur mogenhetssynpunkt ter sig högst olika. Det förefaller mig rimligt, om vid utarbetandet av för denna klass avsedda läroböcker någon hänsyn tages till detta förhållande, så att tillfälle beredes klassens begåvningar till nyttig förståndsträning och samtidig fördjupning av kunskaperna.

Svar på föregående genmäle.

Förf:s analys av uppgiften v. t. 1919 visar just, hur lätt formler binda tanken och tvinga in den i förutbestämda banor. Bortsett nu ifrån att en 6:e klassist av medelläggning, som första gången ställdes inför uppgiften i fråga, helt säkert inte skulle ha kommit till något resultat alls, måste jag erkänna, att jag själv skulle ha kommit just till det resultat, förf. vill påbörda eleven i fråga, eller möjligen till ekvationen $350 + \frac{1}{10} \cdot 350 = \frac{83\frac{1}{3}\, x}{100}$. Aldrig skulle det falla mig in att göra en så opraktisk räkning som att slå ihop 1 hel $+ \frac{10}{100}$ till $\frac{110}{100}$. För övrigt hör ju detta till ekvationstekniska frågor och har mindre att göra med det förnuftsmässiga inträngandet i uppgiften.

Till de av mig i min uppsats angivna fallen, där en formel är av värde, vill förf. lägga det fall, att en lärjunge några gånger etappvis genomlöper vissa tankebanor, varefter han »på ett ögonblick» tillämpar en viss formel. Metoden i dess början är förträfflig, helt enkelt så idealisk, att — *den gör slutet, d. v. s. den medvetet utskrivna formeln fullständigt överflödig.* Men en sådan lärogång är något helt annat än att, som sker i förf:s lärobok, först komma med en abstrakt härledning av en formel, sedan understryka dess vikt och betydelse med meningen: »Denna formel

kallas *diskontformeln*» och därpå låta följa 5 st. direkta insättningsexempel på densamma (sid. 9). Man måste vara tankeläsare för att inse, att förf. med en sådan framställning blott betraktat denna »variant av diskontformeln» (en något anspråkslösare benämning än den nyss ur läroboken citerade) som ett led i deduktionen av den en hel sida därifrån befintliga formeln för effektiva räntan.

Däremot är jag fullt överens med förf. om betydelsen av härledandet av en formel för att ur densamma draga slutsatser ang. de ingående storheternas beroende av varandra. Men detta sker enligt min mening i en lärobok på det mest givande sättet genom ett exempel av ungefär denna typ: »Härled ett samband mellan storheterna a, b och c samt angiv, hur det t. ex. går med a, om c växer» e. d. Formeln härledes då för ett tillfälligt resonemang, varmed den spelat ut sin roll och ej bör stå härledd i läroboken, utpyntad med nummer och benämning och allt. Emellertid är förf:s belägg för en dylik förståndig användning av en formel ej så lyckligt. Att använda deduceringar på nästan en hel sida med formel på formel slutande med $e = \frac{100\,p}{100 - pt}$ blott för att få fram, att växlar måste vara korta, är väl mycket väsen för ingenting, i synnerhet som slutsatsen ju är minst sagt vilseledande. Ty vad är det för egendomlig användning av formeln att låta p vara konstant? En mera värdefull slutsats ur formeln är i stället den, att om t göres stort, bör p göras litet, för att e skall hållas inom rimliga gränser. Lärjungen bör t. ex. ur formeln draga den slutsatsen, att 6 månaders växlar böra draga lägre diskontfot än 3 månaders. När han då får veta, *att det i praktiken är tvärtom,* förstår han, att orsakerna till att växlar på längre tid ej förekomma, äro andra än de, som kunna matematiskt utläsas ur formeln.

Hjalmar Olson.

Till redaktionen insända böcker.

Elis Hjalmar, *Uppgifter i fysik, givna i studentexamen v. t. 1920—h. t. 1925*, med anvisningar och svar. Albert Bonniers förlag, 1926. 38 sid. Häft. kr. 1: 25.

Uppgifterna äro ordnade kronologiskt med lösningar angivna omedelbart efter varje skrivningsgrupp. Till lösningarna äro i de första årgångarna ganska fylliga anvisningar bifogade. I de sista hava dessa anvisningar alltmer inknappats eller helt uteslutits.

C. F. Rydberg, *Uppgifter av mekaniskt och fysikaliskt innehåll*, givna i studentexamen. Tillökade av S. A. Bohman och B. Wahlström. H. t. 1879—h. t. 1925 i urval. P. A. Norstedt & Söners förlag, 1926. 112 sid. Häft. kr. 2: —.

Denna tionde upplaga av studentuppgifterna i fysik äro liksom de föregående ordnade efter uppgifternas art med svar och anvisningar i ett sammanhang i slutet av boken. För att ej göra den nära 50 år omfattande exempelsamlingen alltför vidlyftig har en utgallring av uppgifter företagits, huvudsakligen från de första åren.

Motsvarande samlingar av matematiska uppgifter för real- och latinlinjen äro beräknade att utkomma under loppet av kommande hösttermin.

J. S. Hedström och C. Rendahl, *Algebra, förkortad upplaga*. Albert Bonniers förlag, 1926. 154 sid. Kr. 3: —.

Denna bok omfattar den del av den oförkortade upplagan, som motsvarar 1:a och 2:a realringens kurs i algebra, d. v. s. t. o. m. läran om logaritmer. Härigenom kan boken för billigare pris bliva användbar i sådana skolor, t. ex. lägre tekniska skolor, vilkas algebrakurs har den ovan nämnda omfattningen.

K. L. Hagström, *Plangeometri för gymnasiet*, 6:e uppl. Henric Carlsons bokh., Linköping, 1925. 82 sid. Häft. kr. 1: 75.

Nils Löfman och Torsten Pehrson, *Kemiska räkneuppgifter*, jämte anvisningar för deras behandling, 2:a uppl. P. A. Norstedt & Söners förlag, 1926. 71 sid. Häft. kr. 2: 50.

E. Hubendick och T. Lindmark, Uppfinningarnas bok II, Brännmaterialier värmemotorer och kompressormaskiner. Samma förlag, 1925. 1072 sid., 1556 illustr. Klotb. kr. 35: —, halvfr. kr. 40: —.

Problemavdelning.[1]

Matematiska uppgifter.

221) x_1 och x_2 äro rötterna till ekv. $ax^2 + (a^2 + 1)x + a^2 + 1 = 0$. a väljes så, att ekv. $ax^2 + (a^2 + 1)x + (a + 1)^2 = 0$ får dubbelrot. Beräkna $(x_1^2 - x_2^2)^2$. *X.*

222) Man betraktar alla trianglar på samma bas BC, vilkas tredje vinkelspets A är så belägen, att höjden från A, medianen från B och bissektrisen från C skära varandra i en och samma punkt. Sök orten för denna punkt.

Iter.

Enklare uppgifter, avsedda för skolstadiet.

223) I en likbent triangel bilda höjden, basen och inskrivna cirkelns radie en geometrisk serie. Beräkna vinklarna.

Svar: Basvinklarna äro 78°,46.

224) Bestäm på en glob breddgraderna för två på 10 graders avstånd från varandra belägna parallellcirklar så, att den mellanliggande zonen utgör 5 % av hela klotytan.

Svar: 50° och 60°.

225) Upprita kurvan $y = \dfrac{x^2 - x - 1}{x^3}$.

226) Visa, att $\dfrac{n(n^2 + 3)(n^2 + 5)(n^2 + 6)}{7}$ alltid är ett helt tal, om n är det.

227) Från en punkt på en hyperbel dragas tangenter till konjugathyperbeln. Visa att tangentkordan tangerar den förstnämnda hyperbeln.

[1] Denna avdelning redigeras av adjunkt S. BÄGMAN, till vilken uppgifter och lösningar godhetsfullt kunna insändas under adress: Högre reallärоverket å Östermalm, Stockholm.

228) Upprita en triangel, då man känner en sida, motstående vinkel samt medianen mot en av de övriga sidorna.

Svar till föreg. uppgifter, meddelade på denna avdelning:

199.

x	$\frac{\sqrt{30}}{6}$	$-\frac{\sqrt{30}}{6}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
y	$\frac{\sqrt{30}}{6}$	$-\frac{\sqrt{30}}{6}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

200. $x = n \cdot 60°$. 201. $90°$. 202. $4r$.

203. $\sqrt{3}$ dm^2 och $(3-\sqrt{3})$ dm^2.

206. $a=\sqrt{12}$; $c=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\begin{cases} x=1 \\ y=\pm\sqrt{22} \end{cases}$.

207. Ellipsen $\frac{x^2}{(a-b)^2}+\frac{y^2}{(a+b)^2}=1$.

208. Cirkeln $2x^2+2y^2-ax-by=0$.

213.

x	$2a$	0	$a+b$	$a-b$
y	0	$-2b$	$a-b$	$-a-b$

214. $x=2$.

215. $\operatorname{tg} x=\frac{1\pm\sqrt{-(a^2-2a-1)}}{a-2}$; $1-\sqrt{2}\leqq a\leqq 1+\sqrt{2}$.

216. $0{,}315\,a^2$. 217. 396 m och 1364 m.

218. $\frac{2r}{3}$, där r = konernas basradie. 219. $0{,}426$.

220. Cirkeln $x^2+y^2=k^2$.

Lösningar till uppg. 190—192.

190. *Vilken relation måste finnas mellan koefficienterna* a, b, c *i funktionen* $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, *för att en*

andragradsfunktion $\varphi(x)$ skall kunna finnas, sådan att andra derivatan av $f(x) \cdot \varphi(x)$ är $= f(x)$?

Lösning. Man kan allmännare söka villkoret för att andra derivatan av $f(x) \cdot \varphi(x) = k \cdot f(x)$, där k är en konstant.

Utgå vi från differentialekvationen

$$f''\varphi + 2f'\varphi' + \varphi''f = kf, \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

erhålles genom fortsatt derivation

$$f'''\varphi + 3f''\varphi' + 3f'\varphi'' = kf',$$
$$4f'''\varphi' + 6f''\varphi'' = kf'', \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

av vilka (2) visar, att φ' och f'' måste innehålla samma hela, lineära funktion av x. Denna måste då enligt (1) ingå såsom faktor även i $f(x)$. Den givna funktionen måste således vara av formen

$$f(x) = \left(x + \frac{a}{3}\right)\left(x^2 + \frac{2}{3}ax + \frac{3c}{a}\right)$$
$$= x^3 + ax^2 + \left(\frac{2}{9}a^2 + \frac{3c}{a}\right)x + c,$$

varav villkorsekvationen

$$\frac{2}{9}a^2 + \frac{3c}{a} = b$$

eller

$$2a^3 - 9ab + 27c = 0. \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

Resultatet kan även uttryckas så, att en av rötterna till ekv. $f(x) = 0$ skall vara = tredjedelen av rötternas summa eller, vilket är detsamma, utgöra aritmetiska mediet mellan de båda andra rötterna. *Iter.*

Även löst av X, vilken lämnat 2 lösningar.

191. Visa att

$$\frac{a^3}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^3}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^3}{(c-a)(c-b)} = a + b + c.$$

Skrives uttrycket under formen

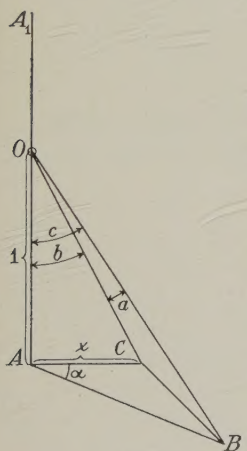
$$\frac{a^3(b-c)-b^3(a-c)+c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = \frac{\begin{vmatrix} a^3 & b^3 & c^3 \\ a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

ser man genast, att täljaren försvinner för $a = b$, för $b = c$ och för $c = a$. Täljaren måste då innehålla nämnarens alla faktorer och bråket således genom förkortning kunna bringas under formen av ett uttryck av första graden med avseende å a, b, c. Då uttrycket måste vara homogent och symmetriskt[1] med avseende å a, b, c, kan det endast vara av formen $k(a+b+c)$. Om vi då i det ursprungliga uttrycket sätta exempelvis $c = 0$, erhålles

$$k(a+b) = \frac{a^2-b^2}{a-b} = a+b,$$

varav $k = 1$, således uttrycket $= a+b+c$.

Löst av *Iter* och *X*, vilka generaliserat uppgiften.



192. *I ett tresidigt hörn är kantvinkeln γ rät och kantvinkeln α given och spetsig. Hur stor skall sidovinkeln a vara, för att skillnaden $(b-c)$ mellan de övriga sidovinklarna skall bliva så stor som möjligt?*

Låt triedern vara $(0; A, B, C)$, där $0A = 1$, planet $ABC \perp 0A$ och $AC = x$. Då är i $\triangle ABC$ $\angle A = \alpha$, $\angle C = \frac{\pi}{2}$. Vi tänka oss b och c spetsiga; då är $c > b$. För den trieder $(0; A_1, B, C)$, som supplerar en sådan till en dieder med kantvinkeln α, är $b_1 = \pi - b$, $c_1 = \pi - c$ och $b_1 - c_1 = c - b$. Vi få

$$c - b = \operatorname{arc\,tg}\frac{x}{\cos\alpha} - \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1-\cos\alpha}{x+\frac{\cos\alpha}{x}}\right)$$ enligt

[1] Om man t. ex. låter a och b byta plats, undergår täljaren och samtidigt även nämnaren endast en teckenändring, bråket förblir således oförändrat.

tangensfunktionens additionsteorem. $c - b$ är alltså maximum, då nämnaren är minimum. Emedan x och $\frac{\cos \alpha}{x}$ ha konstant produkt, inträffar detta, då

$$x = \frac{\cos \alpha}{x} = \sqrt{\cos \alpha}.$$

För detta x-värde är $\operatorname{tg} b = \sqrt{\cos \alpha}$; $\operatorname{tg} c = \frac{\sqrt{\cos \alpha}}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sqrt{\cos \alpha}}$.

Således $b + c = \frac{\pi}{2}$.

Vidare är $\cos a = \frac{x}{\sin b} : \frac{x}{\cos \alpha \sin c} = \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} c = \sqrt{\cos \alpha}$.

Löst av *X* (2 lösn.).
Även löst av *Iter.*